

Exercice 1

7 points

- 1) a. Chaque question est une épreuve de Bernoulli dont le succès « la réponse est bonne » a pour probabilité $p = \frac{1}{5} = 0,2$ (une bonne réponse parmi 5, choisie au hasard). On répète 25 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, et X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,2)$.

b. $E(X) = np = 25 \times 0,2 = 5$ et $V(X) = np(1-p) = 25 \times 0,2 \times 0,8 = 4$.

- 2) a. Tom répond aux 25 questions : chacune est bonne ou mauvaise, donc $X + Y = 25$, soit $Y = 25 - X$.

b. Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = 25 - E(X) = 25 - 5 = 20$.
Pour la variance : $V(aX + b) = a^2 V(X)$, donc $V(Y) = (-1)^2 V(X) = 4$.

- 3) a. Chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en retire 0,5 :

$$Z = 2X - 0,5Y.$$

- b. Le nombre moyen de points sur un grand nombre de QCM est l'espérance de Z :

$$E(Z) = 2E(X) - 0,5E(Y) = 2 \times 5 - 0,5 \times 20 = 10 - 10 = 0.$$

En répondant au hasard, Tom peut espérer, en moyenne, 0 point.

- c. X et Y ne sont pas indépendantes : on exprime Z en fonction de X seule.

$$Z = 2X - 0,5(25 - X) = 2,5X - 12,5.$$

Donc $V(Z) = 2,5^2 V(X) = 6,25 \times 4 = 25$.

Exercice 2

3 points

- 1) X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (le dé est équilibré). Donc

$$E(X_i) = p = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad V(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

- 2) Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, d'espérance $\mu = \frac{1}{6}$ et de variance $V = \frac{5}{36}$. L'inégalité de concentration donne, pour $\delta = 0,05$:

$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{V(X_i)}{n\delta^2} = \frac{5/36}{n \times 0,05^2} = \frac{500}{9n}.$$

3) Il suffit que $\frac{500}{9n} \leq 0,1$:

$$\frac{500}{9n} \leq 0,1 \iff 500 \leq 0,9n \iff n \geq \frac{5000}{9} \approx 555,6.$$

La valeur minimale de n est $\boxed{n = 556}$.

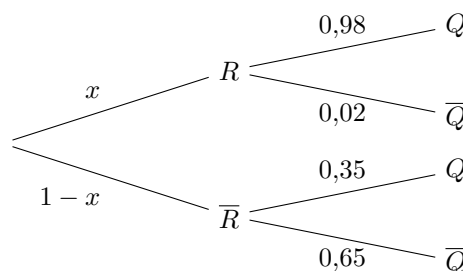
Exercice 3

10 points

1) 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » : $\boxed{P(Q) = 0,917}$.

98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui » : $\boxed{P_R(Q) = 0,98}$.

2) a. $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$, donc $P_{\bar{R}}(Q) = 0,35$; $P_R(\bar{Q}) = 1 - 0,98 = 0,02$.



b. R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q) \iff 0,917 = 0,98x + 0,35(1-x) \\ &\iff 0,917 = 0,63x + 0,35 \\ &\iff 0,63x = 0,567 \\ &\iff x = \frac{0,567}{0,63} = 0,9. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{x = 0,9}$.

3) On cherche $P_Q(R)$:

$$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \frac{0,882}{0,917} \approx \boxed{0,962}.$$

4) On cherche l'entier k tel que $P(N \geq k)$, proportion d'étudiants ayant au moins k , soit la plus proche de 0,3. À la calculatrice ($N \sim \mathcal{B}(20; 0,615)$) :

$$P(N \geq 13) \approx 0,471 \quad P(N \geq 14) \approx 0,296 \quad P(N \geq 15) \approx 0,156.$$

Elle doit récompenser les étudiants ayant obtenu $\boxed{\text{une note supérieure ou égale à 14}}$: environ 29,6 % d'entre eux.

5) Chaque N_i a pour espérance $20 \times 0,615 = 12,3$ et pour variance $20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = 10 \times 12,3 = \boxed{123}$.

Les N_i étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances : $V(S) = 10 \times 4,7355 = \boxed{47,355}$.

6) a. $M = \frac{N_1 + \dots + N_{10}}{10}$ modélise la moyenne des notes des dix étudiants interrogés.

b. $E(M) = \frac{E(S)}{10} = \frac{123}{10} = \boxed{12,3}$ et $V(M) = \frac{V(S)}{10^2} = \frac{47,355}{100} = \boxed{0,473\,55}$.

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M - E(M)| \geq \delta) \leq \frac{V(M)}{\delta^2}.$$

Avec $\delta = 2$:

$$P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,473\,55}{4} \approx 0,118.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(|M - 12,3| < 2) \geq 1 - 0,118\,387\,5 = 0,881\,612\,5 \geq 0,85.$$

Or $|M - 12,3| < 2 \iff 10,3 < M < 14,3$. Donc la probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 85 % : l'affirmation est vraie.