

Exercice 1

20 points

- 1) La fonction f est dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, donc $g = \frac{1}{f}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2}.$$

Comme f est solution de (E_1) , $f'(t) = 0,02 f(t)(15 - f(t))$, donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{0,02 f(t)(15 - f(t))}{f(t)^2} = -\frac{0,02 (15 - f(t))}{f(t)} \\ &= -\frac{0,3}{f(t)} + \frac{0,02 f(t)}{f(t)} = -0,3 g(t) + 0,02. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $g'(t) = -0,3 g(t) + 0,02$: g est solution de (E_2) .

- 2) (E_2) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,3$ et $b = 0,02$.

Solution constante. $y = k$ est solution si et seulement si $0 = -0,3 k + 0,02$, soit $k = \frac{0,02}{0,3} = \frac{1}{15}$.

Solutions. Les solutions de (E_2) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions

$$t \mapsto C e^{-0,3t} + \frac{1}{15}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 3) D'après 1), g est une solution de (E_2) : il existe un réel C tel que $g(t) = C e^{-0,3t} + \frac{1}{15}$.

De plus $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$, d'où $C + \frac{1}{15} = 1$, soit $C = \frac{14}{15}$. Donc

$$g(t) = \frac{14}{15} e^{-0,3t} + \frac{1}{15} = \frac{14 e^{-0,3t} + 1}{15}.$$

Comme $f(t) = \frac{1}{g(t)}$:

$$\boxed{f(t) = \frac{15}{14 e^{-0,3t} + 1}} \quad \text{pour tout } t \in [0; +\infty[.$$

- 4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,3t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = 0$.
Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} (14 e^{-0,3t} + 1) = 1$ et, par quotient,

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 15}.$$

À long terme, la posidonie recouvrirait 15 ha de la zone étudiée (qui en compte 20).

- 5) Pour tout $t \geq 0$, $14 e^{-0,3t} + 1 > 0$, donc on peut multiplier par ce nombre sans changer le sens

de l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 f(t) > 14 &\iff 15 > 14(14e^{-0,3t} + 1) \\
 &\iff 15 > 196e^{-0,3t} + 14 \\
 &\iff e^{-0,3t} < \frac{1}{196} \\
 &\iff -0,3t < \ln \frac{1}{196} = -\ln 196 \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante}) \\
 &\iff t > \frac{\ln 196}{0,3} \quad (\text{on divise par } -0,3 < 0)
 \end{aligned}$$

Comme $\ln 196 = \ln(14^2) = 2 \ln 14$, on a $\frac{\ln 196}{0,3} = \frac{20}{3} \ln 14 \approx 17,6$.

L'ensemble des solutions est

$$S = \left] \frac{20}{3} \ln 14 ; +\infty \right[.$$

Interprétation. Selon ce modèle, la posidonie recouvrira plus de 14 ha de la zone étudiée au bout d'environ 17,6 ans, c'est-à-dire à partir du début de l'année 2042 (environ 17 ans et 7 mois après le 1^{er} juillet 2024).