

Calculatrice autorisée

Exercice 1

20 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu. Dans ce modèle, pour une durée t , en années, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0; +\infty[$;
- f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = 0,02 y (15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cet exercice est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f .

- 1) (4 points) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : y' = -0,3 y + 0,02.$$

- 2) (4 points) Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .
3) (4 points) En déduire que, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

- 4) (3 points) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5) (5 points) Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.