

Exercice 1

6 points

Barème indicatif, en points : 1) 2; 2) 2; 3) 2.

- 1) La surface colorée est comprise entre la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. **Attention** : $g(x) = (x-1)(x+1)$ est négative sur $[0; 1]$ et positive sur $[1; 2]$. On coupe donc l'aire en deux :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (-g(x)) \, dx + \int_1^2 g(x) \, dx = \int_0^1 (1-x^2) \, dx + \int_1^2 (x^2-1) \, dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

L'aire de la surface colorée est $\boxed{\mathcal{A} = 2 \text{ u.a.}}$

- 2) La hauteur moyenne est la valeur moyenne de h sur $[-80; 80]$:

$$M = \frac{1}{80 - (-80)} \int_{-80}^{80} 10 \left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}} \right) \, dx.$$

Une primitive de $x \mapsto e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}}$ est $x \mapsto 40 e^{\frac{x}{40}} - 40 e^{-\frac{x}{40}}$. Donc :

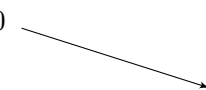
$$\begin{aligned} M &= \frac{10}{160} \left[40 e^{\frac{x}{40}} - 40 e^{-\frac{x}{40}} \right]_{-80}^{80} = \frac{1}{16} \times 40 \left((e^2 - e^{-2}) - (e^{-2} - e^2) \right) \\ &= \frac{5}{2} \times (2e^2 - 2e^{-2}) = 5(e^2 - e^{-2}). \end{aligned}$$

La hauteur moyenne de la ligne est $\boxed{M = 5(e^2 - e^{-2}) \approx 36,27 \text{ m}}$ (au centimètre près).

- 3) La fonction $t \mapsto 1 - e^{t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc F , qui en est la primitive s'annulant en 0, est dérivable sur $[0; +\infty[$ avec

$$F'(x) = 1 - e^{x^2}.$$

- $F'(0) = 1 - e^0 = 0$;
- pour $x > 0$: $x^2 > 0$, donc $e^{x^2} > e^0 = 1$ (croissance stricte de l'exponentielle), d'où $F'(x) < 0$.

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	0	—
F	0	

Donc $\boxed{F \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[}$ (avec $F(0) = 0$).

Exercice 2

7,5 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1,5; 3) 1,5; 4) 1,5; 5) 2.

1) Une primitive de $x \mapsto e^{3x+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{3} e^{3x+1}$:

$$\int_0^2 e^{3x+1} dx = \left[\frac{e^{3x+1}}{3} \right]_0^2 = \frac{e^7}{3} - \frac{e^1}{3} = \boxed{\frac{1}{3} (e^7 - e)} \approx 364,64.$$

2) On reconnaît la forme $\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$:

$$\int_0^4 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^4 = \boxed{\frac{e^{16} - 1}{2}}.$$

3) On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 2x$, $u'(x) = 2x - 2$, et $u(x) = x(x - 2) > 0$ sur $[3; 4]$:

$$\int_3^4 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} dx = \left[\ln(x^2 - 2x) \right]_3^4 = \ln(8) - \ln(3) = \boxed{\ln\left(\frac{8}{3}\right)} \approx 0,98.$$

4) Une primitive de $x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est $x \mapsto 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, et une primitive de $\sin$ est $-\cos$:

$$\int_0^\pi \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(x) \right) dx = \left[2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) \right]_0^\pi = (2 \times 1 - (-1)) - (0 - 1) = \boxed{4}.$$

5) On pose, pour $x \in [0; 1]$: $u(x) = x + 1$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$ (u et v dérivables à dérivées continues). Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x + 1) e^{-x} dx &= \left[-(x + 1) e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = (-2 e^{-1} + 1) + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -2 e^{-1} + 1 + \left[-e^{-x} \right]_0^1 = -2 e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = \boxed{2 - \frac{3}{e}} \approx 0,90. \end{aligned}$$

Exercice 3

6,5 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1,5; 3) 1,5; 4) 1,5; 5) 1.

1) Sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 - x > 0$. Avec $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, on a $\frac{1}{1-x} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$, donc :

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} = \left[-\ln(1-x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(1) = \boxed{\ln(2)}.$$

2) Par linéarité de l'intégrale :

$$I_0 - I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

D'où $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$, soit $\boxed{I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}} \approx 0,19$.

3) Soit $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq 1-x \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2,$$

car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$. En multipliant par $x^n \geq 0$:

$$\boxed{x^n \leq \frac{x^n}{1-x} \leq 2x^n}.$$

4) On intègre cet encadrement sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \leq I_n \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx.$$

Or $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1) 2^{n+1}}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{1}{(n+1) 2^{n+1}} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1) 2^n}}.$$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) 2^{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) 2^n = +\infty$ (produits de suites tendant vers $+\infty$), donc par passage à l'inverse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1) 2^{n+1}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1) 2^n} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{(I_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$.