

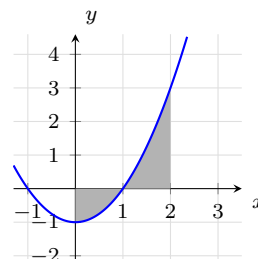
Calculatrice autorisée en mode examen

Exercice 1

6 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$ et dont la courbe est représentée ci-contre. Calculer l'aire de la surface colorée.



- 2) La hauteur, en mètres, d'une ligne électrique de 160 mètres peut être modélisée par la fonction h définie sur $[-80; 80]$ par $h(x) = 10 \left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}} \right)$. Quelle est la hauteur moyenne de cette ligne électrique ? On donnera la valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée au centimètre.
- 3) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x (1 - e^{t^2}) dt$. Étudier les variations de F .

Exercice 2

7,5 points

Calculer les intégrales suivantes.

- 1) $\int_0^2 e^{3x+1} dx$
- 2) $\int_0^4 x e^{x^2} dx$
- 3) $\int_3^4 \frac{2x-2}{x^2-2x} dx$
- 4) $\int_0^\pi \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(x) \right) dx$
- 5) $\int_0^1 (x+1) e^{-x} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)

Exercice 3

6,5 points

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \quad \left(\text{avec } I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} \right).$$

- 1) Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
- 2) Calculer $I_0 - I_1$ et en déduire la valeur de I_1 .
- 3) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x^n \leq \frac{x^n}{1-x} \leq 2x^n$.
- 4) En déduire un encadrement de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) Étudier la convergence de la suite (I_n) .