

Exercice 1

6 points

Barème indicatif, en points : 1) a. 1; b. 3; 2) 2.

1) a. En traçant les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ à la calculatrice, on conjecture que :

- $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty ; 1]$ et sur $[5 ; +\infty[$;
- $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_g$ sur $[1 ; 5]$;
- les courbes se coupent aux points d'abscisses 1 et 5.

b. On étudie le signe de la différence. Pour tout réel x :

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 1 - (x^2 + 3x - 4) = x^2 - 6x + 5.$$

Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$, d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5, \quad \text{donc } f(x) - g(x) = (x-1)(x-5).$$

Un trinôme est du signe de son coefficient dominant ($1 > 0$) à l'extérieur de ses racines :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+

Donc :

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur }]-\infty ; 1] \cup [5 ; +\infty[} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur } [1 ; 5]},$$

les courbes se coupant aux points d'abscisses 1 et 5. La conjecture est démontrée.

2) Sur $[2 ; 4] \subset [1 ; 5]$, on a $g(x) \geq f(x)$: l'aire du domaine est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_2^4 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 5) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_2^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 20 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 10 \right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

L'aire du domaine est $\boxed{\mathcal{A} = \frac{22}{3} \text{ u.a.}} \approx 7,33 \text{ u.a.}$

Exercice 2

14 points

Barème indicatif, en points : 1) a. 1,5; b. 1; 2) a. 2,5; b. 1; c. 2; 3) 2; 4) a. 1,5; b. 2,5.

- 1) a. F est dérivable sur $[0; 1]$ comme produit de fonctions dérivables. On pose $u(x) = -1 - x$ et $v(x) = e^{1-x}$, avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -e^{1-x}$. Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -e^{1-x} + (-1-x)(-e^{1-x}) \\ &= -e^{1-x} + (1+x)e^{1-x} = e^{1-x}(-1+1+x) = xe^{1-x} = f(x). \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $[0; 1]$.

- b. D'après la question précédente :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{1-x} dx = F(1) - F(0) = (-2)e^0 - (-1)e^1 = -2 + e,$$

donc $I_1 = e - 2$.

- 2) a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $x \in [0; 1]$:

$$u(x) = x^{n+1}, \quad u'(x) = (n+1)x^n, \quad v'(x) = e^{1-x}, \quad v(x) = -e^{1-x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; 1]$, à dérivées continues. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{1-x}) dx \\ &= (-1 \times e^0) - 0 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1) I_n. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$.

- b. Avec $n = 1$: $I_2 = 2 I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1$, soit $I_2 = 2e - 5 \approx 0,437$.

- c. La fonction prend en argument l'entier n ; la variable k parcourt les rangs de 2 à n (d'où $\text{range}(2, n+1)$) et la relation de la question 2.a, écrite au rang k , donne $I_k = k I_{k-1} - 1$:

```
1 from math import exp
2 def termes(n):
3     I = exp(1) - 2
4     L = [I]
5     for k in range(2, n+1):
6         I = k*I - 1
7         L.append(I)
8     return L
```

Variante : `for k in range(1, n):` avec $I = (k+1)*I - 1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{1-x} dx = \int_0^1 x^n (x - 1) e^{1-x} dx.$$

Pour tout $x \in [0; 1] : x^n \geq 0, e^{1-x} > 0$ et $x - 1 \leq 0$, donc $x^n (x - 1) e^{1-x} \leq 0$.

Par positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant, $0 < 1$), $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite (I_n) est décroissante.

4) a. Soit $x \in [0; 1]$ et $n \geq 1$.

$$0 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq -x \leq 0 \iff 0 \leq 1 - x \leq 1 \implies e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$$

car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. En multipliant par $x^n \geq 0$:

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e,$$

et comme $x^n \geq 0$, on obtient bien $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b. Par croissance de l'intégrale (bornes $0 < 1$), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx.$$

$$\text{Or } \int_0^1 e x^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}. \text{ D'où l'encadrement}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.