

Calculatrice autorisée

Exercice 1

6 points

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 3x - 4.$$

- 1)
 - a. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative des courbes représentatives de ces deux fonctions.
 - b. Démontrer cette conjecture.
- 2) En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Exercice 2

14 points

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

- 1)
 - a. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (-1 - x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0; 1]$ de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
 - b. En déduire que $I_1 = e - 2$.
- 2)
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n + 1)I_n - 1$.
 - b. Calculer alors I_2 .
 - c. Recopier et compléter le script de la fonction `termes` ci-dessous pour qu'elle renvoie la liste des termes de la suite (I_n) du rang 1 au rang n .

```

1 from math import exp
2 def termes(...):
3     I = exp(1) - 2
4     L = [I]
5     for k in range(..., ...):
6         I = ...
7         L.append(I)
8     return(...)

```

- 3) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n) .
- 4)
 - a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
 - b. En déduire, pour n de $\mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n , puis déterminer la limite de la suite (I_n) .