

Exercice 1 – Puissances et suites géométriques

6 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1,5; 3) a. 0,5; b. 0,5; c. 0,5; 4) a. 1; b. 1.

1) $1,5^2 = 1,5 \times 1,5 = \boxed{2,25}$; $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{32}$; $0,5^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = \boxed{0,125}$.

2) On utilise les règles sur les puissances :

$$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = \boxed{3^6}; \quad (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = \boxed{2^6}; \quad \frac{1,2^5}{1,2^3} = 1,2^{5-3} = \boxed{1,2^2}.$$

3) a. On multiplie par 1,5 à chaque étape : $v(1) = 40 \times 1,5 = \boxed{60}$; $v(2) = 60 \times 1,5 = \boxed{90}$; $v(3) = 90 \times 1,5 = \boxed{135}$.

b. Pour une suite géométrique, $v(n) = v(0) \times q^n$: $\boxed{v(n) = 40 \times 1,5^n}$.

c. La raison 1,5 est supérieure à 1 et les termes sont positifs : chaque terme est plus grand que le précédent. La suite $(v(n))$ est **croissante**.

4) a. $w(1) = 0,8 \times 4\,000 = \boxed{3\,200}$ et $w(2) = 0,8 \times 3\,200 = \boxed{2\,560}$.

b. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre 0,8 : la suite $(w(n))$ est **géométrique de raison** 0,8. Comme $0 < 0,8 < 1$ et que les termes sont positifs, la suite est **décroissante**.

Exercice 2 – Un épisode de pollution aux particules fines

10 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1,5; 3) 1,5; 4) 1; 5) 1,5; 6) 1,5; 7) 2.

Partie A – Un modèle heure par heure

1) Baisser de 10 % revient à garder 90 %, c'est-à-dire à multiplier par 0,9 : $u(1) = 200 \times 0,9 = \boxed{180}$ et $u(2) = 180 \times 0,9 = \boxed{162}$ (en $\mu\text{g}/\text{m}^3$).

2) Chaque heure, la concentration est multipliée par 0,9 : pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{u(n+1) = 0,9 \times u(n)}.$$

La suite $(u(n))$ est donc **géométrique de raison** 0,9 et de premier terme $u(0) = 200$.

3) $\boxed{u(n) = 200 \times 0,9^n}$. Ainsi $u(3) = 200 \times 0,9^3 = 200 \times 0,729 = \boxed{145,8} \mu\text{g}/\text{m}^3$.

4) La raison 0,9 est comprise entre 0 et 1 et les termes sont positifs : la suite $(u(n))$ est **décroissante**. La concentration de particules fines dans l'air de la ville diminue d'heure en heure.

Partie B – Un modèle à tout instant

- 5) On trace la droite horizontale d'ordonnée 100 : elle coupe la courbe en un point d'abscisse comprise entre 6,5 et 7. La concentration passe sous 100 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ environ 6 h 30 après 8 h, soit **vers 14 h 30** (le tableau confirme : $u(6) = 106,3 > 100$ et $u(7) = 95,7 < 100$).
- 6) Dans la colonne $u(n)$, la première valeur inférieure à 50 est $u(14) = 45,8$ (alors que $u(13) = 50,8 > 50$). La concentration passe sous le seuil de 50 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ au bout de 14 heures, c'est-à-dire à partir de **22 h** : le message d'information peut alors cesser.
- 7) Par la propriété $a^{x+1} = a^x \times a^1$:

$$f(x+1) = 200 \times 0,9^{x+1} = 200 \times 0,9^x \times 0,9 = 0,9 \times f(x).$$

Quel que soit l'instant de départ (même entre deux heures « rondes »), une heure plus tard la concentration vaut 90 % de sa valeur de départ : la baisse de 10 % par heure est valable à tout instant, pas seulement aux heures entières.

Exercice 3 — Question ouverte : qui a raison, Nour ou Elouan ?

4 points

Barème indicatif, en points : Nour 2 (calcul ou lecture du tableau, conclusion); Elouan 2 (baisse non constante, concentration jamais nulle).

Nour. Au bout de 7 heures, le tableau donne $u(7) = 95,7$, alors que la moitié de 200 est 100; de même $u(14) = 45,8$ est proche de la moitié de 95,7 (qui vaut 47,85). Par le calcul : $0,9^7 = 0,478$, proche de 0,5. *L'affirmation de Nour est correcte : elle dit bien « environ », et toutes les 7 heures la concentration est divisée par un peu plus de 2.*

Elouan. La première heure, la baisse est bien de $200 - 180 = 20 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Mais la deuxième heure, la baisse est de $180 - 162 = 18$, puis de $162 - 145,8 = 16,2$: **la baisse n'est pas la même chaque heure**, car on retire toujours 10 % d'une concentration de plus en plus petite. Ce n'est pas une diminution linéaire. De plus, au bout de 10 heures, la concentration vaut $u(10) = 69,7 \mu\text{g}/\text{m}^3$, et non 0 : en multipliant chaque heure par 0,9, elle ne devient jamais nulle. *L'affirmation d'Elouan est fausse.*