

Exercice 1 – Les sandwiches du foodtruck

10 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1; 3) 1,5; 4) 1,5; 5) 1; 6) 1; 7) 1,5; 8) 1,5.

Partie A – La recette

1) Pour $p = 4$: $n(4) = 600 - 50 \times 4 = 600 - 200 = 400$ sandwiches. La recette est $4 \times 400 = 1\,600$ euros.

2) La recette est le prix d'un sandwich multiplié par le nombre de sandwiches vendus :

$$R(p) = p \times n(p) = p(600 - 50p) = 600p - 50p^2 = -50p^2 + 600p.$$

3) On développe : $-50p(p - 12) = -50p^2 + 600p = R(p)$. Donc $R(p) = -50p(p - 12)$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $R(p) = 0 \iff p = 0$ ou $p - 12 = 0 \iff p = 0$ ou $p = 12$. Les solutions sont 0 et 12.

Si les sandwiches sont donnés (0 euro), la recette est nulle; à 12 euros, $n(12) = 600 - 600 = 0$: plus personne n'achète, la recette est nulle aussi.

4) Les racines de R sont 0 et 12; par symétrie de la parabole, l'axe de symétrie passe par leur milieu : $\frac{0 + 12}{2} = 6$. L'axe de symétrie a pour équation $p = 6$.

Le coefficient -50 est négatif : la parabole est tournée vers le bas et le sommet, d'abscisse 6, est le point le plus haut. $R(6) = -50 \times 6 \times (6 - 12) = -50 \times 6 \times (-6) = 1\,800$.

La recette est maximale pour un prix de vente de 6 euros; elle vaut alors 1 800 euros par jour.

Partie B – Le bénéfice

5) $B(2) = (2 - 2)(600 - 100) = 0 \times 500 = 0$ et $B(12) = (12 - 2)(600 - 600) = 10 \times 0 = 0$.

À 2 euros, chaque sandwich est vendu à son prix de revient : le foodtruck ne gagne rien. À 12 euros, il ne vend aucun sandwich, donc ne gagne rien non plus.

6) On factorise $600 - 50p = -50(p - 12)$ (en effet $-50 \times (p - 12) = -50p + 600$). Donc

$$B(p) = (p - 2) \times (-50)(p - 12) = -50(p - 2)(p - 12).$$

7) Sur $[0; 12]$: -50 est toujours négatif; $p - 2$ est négatif pour $p < 2$ et positif pour $p > 2$; $p - 12$ est négatif pour $p < 12$ et nul en 12.

p	0	2	12
-50	—	—	—
$p - 2$	—	0	+
$p - 12$	—	—	0
$B(p)$	—	0	+

Le bénéfice est strictement positif pour un prix strictement compris entre 2 et 12 euros : c'est pour ces prix que le foodtruck gagne de l'argent. En dessous de 2 euros, il vend à perte.

- 8) Les racines de B sont 2 et 12 : l'axe de symétrie est la droite d'équation $p = \frac{2+12}{2} = 7$. Comme $-50 < 0$, le sommet est un maximum :

$$B(7) = -50 \times (7-2) \times (7-12) = -50 \times 5 \times (-5) = 1\,250.$$

Le bénéfice est maximal pour un prix de vente de 7 euros et vaut alors 1 250 euros par jour. Ce n'est pas le prix qui rend la recette maximale (6 euros) : vendre un peu plus cher fait perdre quelques clients, mais chaque sandwich vendu rapporte davantage.

Exercice 2 – Question ouverte : l'enclos des chèvres

4 points

Barème indicatif, en points : modélisation (expression de l'aire) 1,5; forme factorisée et racines 1; axe de symétrie et maximum 1; conclusion 0,5.

On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires à la rivière. La clôture mesure 40 m et couvre ces deux côtés et le côté parallèle à la rivière : ce dernier mesure donc $40 - 2x$ mètres. Comme les longueurs sont positives, $0 \leq x \leq 20$.

L'aire de l'enclos, en m^2 , est

$$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x = -2x(x - 20).$$

C'est une fonction polynôme de degré 2 sous forme factorisée, de racines 0 et 20 : pour $x = 0$ ou $x = 20$, l'enclos est « plat » et son aire est nulle. Le coefficient -2 est négatif : la parabole est tournée vers le bas, l'aire admet un maximum au sommet, dont l'abscisse est le milieu des racines : $\frac{0+20}{2} = 10$.

Pour $x = 10$: le côté parallèle à la rivière mesure $40 - 2 \times 10 = 20$ m, et l'aire vaut $A(10) = 10 \times 20 = 200 m^2$.

L'éleveur doit choisir un enclos de 10 m sur 20 m (le grand côté le long de la rivière) : son aire, $200 m^2$, est la plus grande possible. On peut vérifier avec d'autres valeurs : 5 m sur 30 m donne $150 m^2$, 15 m sur 10 m donne $150 m^2$, toutes deux inférieures à $200 m^2$.

Exercice 3 – Calculs sur une forme factorisée

6 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1; 3) 1,5; 4) 1; 5) 1,5.

1) $f(x) = (x+3)(2x-4) = 2x^2 - 4x + 6x - 12 = 2x^2 + 2x - 12$.

2) $f(x) = 0 \iff x+3=0$ ou $2x-4=0 \iff x=-3$ ou $x=2$. Les racines de f sont -3 et 2 .

- 3) $x + 3$ est négatif pour $x < -3$ et positif pour $x > -3$; $2x - 4$ est négatif pour $x < 2$ et positif pour $x > 2$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

- 4) $f(-2) = (-2 + 3)(2 \times (-2) - 4) = 1 \times (-8) = \boxed{-8}$ et $f(1) = (1 + 3)(2 \times 1 - 4) = 4 \times (-2) = \boxed{-8}$.

Les points de la parabole d'abscisses -2 et 1 ont la même ordonnée -8 : ils sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie, qui passe par le milieu de -2 et 1 , soit $\frac{-2 + 1}{2} = -0,5$. L'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = -0,5}$ (on retrouve le milieu des racines -3 et 2).

- 5) Le sommet a pour abscisse $-0,5$ et pour ordonnée

$$f(-0,5) = (-0,5 + 3)(2 \times (-0,5) - 4) = 2,5 \times (-5) = -12,5.$$

Le sommet est $\boxed{S(-0,5; -12,5)}$. Le coefficient de x^2 est $2 > 0$: la parabole est tournée vers le haut et le sommet est un minimum.

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$f(x)$			