

Exercice 1 – Dix questions sur les paraboles (réponses courtes)

5 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'était exigée.

N°	Réponse	Éléments de méthode
1	$x^2 + 2x - 15$	$(x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15$.
2	1 et -6	Produit nul : $x - 1 = 0$ ou $x + 6 = 0$.
3	négatif	$(3 - 2)(3 - 6) = 1 \times (-3) = -3 < 0$.
4	$S(0; -1)$	Parabole de la forme $y = ax^2 + c$: sommet sur l'axe des ordonnées, en $(0; c)$.
5	vers le bas	Le coefficient de x^2 est $-3 < 0$.
6	$x = 3$	Racines 1 et 5; l'axe passe par leur milieu $\frac{1+5}{2} = 3$.
7	$S = \{-7; 7\}$	$x^2 = 49 \iff x = 7$ ou $x = -7$.
8	$(x - 3)(x + 3)$	Identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $9 = 3^2$.
9	$x(x - 4)$	Toute expression $ax(x - 4)$ avec $a \neq 0$ convient, par exemple $x(x - 4)$ ou $2x(x - 4)$.
10	$(-1; 6)$	Le point symétrique de $A(5; 6)$ par rapport à l'axe $x = 2$: 5 est à 3 unités à droite de 2, donc son symétrique est $2 - 3 = -1$, à la même hauteur 6.

Exercice 2 – Le câble de la passerelle

6 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) a. 1; b. 1.

1) $c(0) = 0,01 \times 0 + 1,5 = 1,5$ et $c(30) = 0,01 \times 900 + 1,5 = 9 + 1,5 = 10,5$.

Au milieu de la passerelle, le câble est à 1,5 m au-dessus du tablier : c'est sa hauteur minimale. Aux extrémités, il est à 10,5 m : c'est la hauteur à laquelle le câble est accroché aux pylônes.

2) $c(-20) = 0,01 \times (-20)^2 + 1,5 = 0,01 \times 400 + 1,5 = 5,5$ et $c(20) = 0,01 \times 400 + 1,5 = 5,5$.

Deux points d'abscisses opposées ont la même hauteur : la courbe de c est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$), comme toute parabole d'équation $y = ax^2 + c$.

3) On isole x^2 , puis on cherche les nombres dont le carré vaut 400 :

$$c(x) = 5,5 \iff 0,01x^2 + 1,5 = 5,5 \iff 0,01x^2 = 4 \iff x^2 = 400 \iff x = 20 \text{ ou } x = -20.$$

Les solutions sont -20 et 20 (ce qui confirme la question 2).

- 4) Le coefficient 0,01 est positif : la parabole est tournée vers le haut, c est décroissante puis croissante, avec un minimum 1,5 en $x = 0$.

x	-30	0	30
$c(x)$	10,5	1,5	10,5

- 5) a. On isole x^2 , puis on fait tout passer à gauche :

$$c(x) \geq 2,5 \iff 0,01x^2 + 1,5 \geq 2,5 \iff 0,01x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq 100 \iff x^2 - 100 \geq 0.$$

Or $x^2 - 100 = x^2 - 10^2 = (x - 10)(x + 10)$. Donc $c(x) \geq 2,5 \iff (x - 10)(x + 10) \geq 0$.

- b. Tableau de signes sur $[-30 ; 30]$:

x	-30	-10	10	30	
$x - 10$	-	-	0	+	
$x + 10$	-	0	+	+	
$(x - 10)(x + 10)$	+	0	-	0	+

Les solutions sont les réels x de $[-30 ; -10] \cup [10 ; 30]$.

La bannière de 2,5 m peut être suspendue sur les 20 derniers mètres de chaque côté de la passerelle, c'est-à-dire à au moins 10 m du milieu. Sur le graphique, la courbe est bien au-dessus de la hauteur 2,5 à gauche de -10 et à droite de 10.

Exercice 3 – Cinq affirmations sur les paraboles (vrai ou faux)

5 points

Barème indicatif : 1 point par affirmation justifiée.

Affirmation 1. Vrai. Le coefficient devant le produit est $-2 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, son sommet est le point le plus haut. La fonction admet donc un maximum (atteint en $x = -1$, milieu des racines 1 et -3, et égal à $f(-1) = -2 \times (-2) \times 2 = 8$).

Affirmation 2. Faux. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 3 \geq 3 > 0$: l'ordonnée d'un point de la parabole n'est jamais nulle. L'équation $x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Affirmation 3. Vrai. Les racines de g sont 2 et 8. Par symétrie de la parabole, le sommet a pour abscisse le milieu des racines : $\frac{2+8}{2} = 5$.

Affirmation 4. Faux. Il suffit d'un contre-exemple : $x = 0 > -1$ et $(0+1)(0-4) = 1 \times (-4) = -4 < 0$. En fait, $(x+1)(x-4)$ est négatif pour x compris entre les racines -1 et 4.

Affirmation 5. Vrai. On développe $v(x)$: $v(x) = (x-3)(x+1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3 = u(x)$ pour tout réel x . Les deux fonctions sont égales.

Exercice 4 – Étude d'une forme factorisée

4 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1.

1) $f(x) = 2(x^2 - 3x + x - 3) = 2(x^2 - 2x - 3) = \boxed{2x^2 - 4x - 6}$.

2) $f(x) = 0 \iff x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$. Les racines sont $\boxed{-1 \text{ et } 3}$. Le facteur 2 est positif :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

3) D'après la question 1, $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$; le terme constant -6 disparaît :

$$f(x) = -6 \iff 2x^2 - 4x - 6 = -6 \iff 2x^2 - 4x = 0 \iff 2x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Les solutions sont $\boxed{0 \text{ et } 2}$. Les points de la parabole d'abscisses 0 et 2 ont la même ordonnée -6 : ils sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, qui passe par le milieu $\frac{0+2}{2} = 1$. L'axe de symétrie est la droite d'équation $\boxed{x = 1}$ (on retrouve le milieu des racines -1 et 3).

4) Le sommet est sur l'axe : son abscisse est 1 et son ordonnée est $f(1) = 2 \times (1+1) \times (1-3) = 2 \times 2 \times (-2) = -8$. Le sommet est $\boxed{S(1; -8)}$. Comme $2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : f est décroissante puis croissante, avec un minimum -8 en $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		-8	