

Exercice 1 – Quatre paraboles, quatre expressions

7 points

Barème indicatif, en points : 1) 2; 2) a. 1; b. 1; c. 1; d. 1; 3) 1.

- 1) On regarde d'abord l'orientation : le coefficient de x^2 est positif pour f (1) et pour h : en développant $(x-1)(x-3)$, le seul terme en x^2 vient de $x \times x$, donc $h(x) = x^2 + \dots$, de coefficient 1. Il est négatif pour g ($-0,5$) et pour k (le signe « $-$ » devant le produit donne $-x^2 + \dots$, coefficient -1). Les paraboles tournées vers le haut sont $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$, celles tournées vers le bas $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.

Puis les points d'intersection avec l'axe des abscisses : $f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ s'annule en -2 et 2 : c'est $\mathcal{C}_2$; h s'annule en 1 et 3 : c'est $\mathcal{C}_4$. $g(x) = -0,5x^2$ ne s'annule qu'en 0 (sommet à l'origine) : c'est $\mathcal{C}_3$; k s'annule en -1 et 3 : c'est $\mathcal{C}_1$.

$$\mathcal{C}_1 \rightarrow k \quad \mathcal{C}_2 \rightarrow f \quad \mathcal{C}_3 \rightarrow g \quad \mathcal{C}_4 \rightarrow h$$

- 2) a. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$h(x) = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0 \iff x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Les racines de h sont $\boxed{1 \text{ et } 3}$.

- b. $x-1$ est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$; $x-3$ est négatif pour $x < 3$ et positif pour $x > 3$. On fait le produit des signes :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	−	0	+	+
$x-3$	−	−	0	+
$h(x)$	+	0	−	+

$h(x)$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur.

- c. $h(2) = (2-1)(2-3) = 1 \times (-1) = \boxed{-1}$. Le nombre 2 est le milieu des racines 1 et 3 : par symétrie de la parabole, le sommet a pour abscisse 2. Le sommet est $\boxed{S(2; -1)}$ et l'axe de symétrie est la droite d'équation $\boxed{x = 2}$.

- d. La parabole est tournée vers le haut : h est décroissante puis croissante, avec un minimum égal à -1 atteint en $x = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$		-1	

- 3) On développe le produit puis on change tous les signes :

$$k(x) = -(x^2 - 3x + x - 3) = -(x^2 - 2x - 3) = \boxed{-x^2 + 2x + 3}.$$

Exercice 2 — Le coup de pied en cloche

7 points

Barème indicatif, en points : 1) 1; 2) 1,5; 3) a. 1; b. 1; c. 1,5; 4) 1.

1) $h(10) = -0,02 \times 10 \times (10 - 40) = -0,02 \times 10 \times (-30) = -0,2 \times (-30) = \boxed{6}$;
 $h(20) = -0,02 \times 20 \times (20 - 40) = -0,4 \times (-20) = \boxed{8}$.

À 10 m du joueur, le ballon est à 6 m de hauteur; à 20 m, il est à 8 m.

2) Le produit $-0,02 \times x \times (x - 40)$ est nul si et seulement si $x = 0$ ou $x - 40 = 0$:

$$h(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 40.$$

Les solutions sont $\boxed{0 \text{ et } 40}$: le ballon part du sol au niveau du joueur ($x = 0$) et retombe au sol à 40 mètres de lui.

3) a. On développe le membre de droite :

$$-0,02(x - 10)(x - 30) = -0,02(x^2 - 30x - 10x + 300) = -0,02x^2 + 0,8x - 6.$$

Et le membre de gauche : $h(x) - 6 = -0,02x(x - 40) - 6 = -0,02x^2 + 0,8x - 6$. Les deux expressions sont égales : $\boxed{h(x) - 6 = -0,02(x - 10)(x - 30)}$.

b. $h(x) = 6 \iff h(x) - 6 = 0 \iff -0,02(x - 10)(x - 30) = 0 \iff x = 10 \text{ ou } x = 30$. Les solutions sont $\boxed{10 \text{ et } 30}$.

c. Les points de la courbe d'abscisses 10 et 30 ont la même hauteur 6 : ils sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, qui passe donc par le milieu de 10 et 30, c'est-à-dire $\frac{10 + 30}{2} = 20$. (On le retrouve avec les racines 0 et 40, de milieu 20.) L'axe de symétrie est la droite d'équation $\boxed{x = 20}$.

Le sommet est sur cet axe : la hauteur maximale est $h(20) = \boxed{8 \text{ mètres}}$.

4) À 5 mètres du joueur, le ballon est à la hauteur

$$h(5) = -0,02 \times 5 \times (5 - 40) = -0,1 \times (-35) = 3,5.$$

Or $3,5 > 2,5$. Le ballon passe à 3,5 mètres de hauteur, soit un mètre au-dessus des bras levés de l'adversaire : il passe au-dessus de lui.

Exercice 3 — La copie de Timéo (copie d'un élève)

6 points

Barème indicatif, en points : 1) 1,5; 2) 1,5; 3) 1,5; 4) 1,5.

1) Timéo a « changé le signe » des nombres lus dans les facteurs : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$ (et non -2), et $x + 4 = 0$ donne $x = -4$ (et non 4). On vérifie : $f(2) = 3 \times 0 \times 6 = 0$ et $f(-4) = 3 \times (-6) \times 0 = 0$. Les racines de f sont $\boxed{-4 \text{ et } 2}$.

- 2) Le facteur 3 est toujours positif ; $x - 2$ est négatif pour $x < 2$, positif pour $x > 2$; $x + 4$ est négatif pour $x < -4$, positif pour $x > -4$.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$x - 2$		−	0	+
$x + 4$	−	0	+	+
$f(x)$	+	0	−	+

Timéo a raison de dire que la parabole est tournée vers le haut ($3 > 0$), mais il en tire la mauvaise conclusion : quand la parabole est tournée vers le haut, elle passe *sous* l'axe des abscisses entre ses deux racines, donc $f(x)$ est **négatif** entre les racines ($-4 < x < 2$) et positif à l'extérieur.

- 3) Le milieu des racines -4 et 2 est $\frac{-4 + 2}{2} = -1$: l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = -1$.

L'ordonnée du sommet est $f(-1) = 3 \times (-1 - 2) \times (-1 + 4) = 3 \times (-3) \times 3 = -27$. Le sommet est $S(-1 ; -27)$.

- 4) Le nombre 1 est compris entre -2 et 4 . Si $f(x)$ était positif pour tout x compris entre -2 et 4 , alors $f(1)$ devrait être positif. Or Timéo trouve $f(1) = -15$, qui est négatif. Les deux affirmations se contredisent : au moins l'une des deux est fausse, ce qui aurait dû l'alerter et le pousser à vérifier ses racines et son étude de signe.