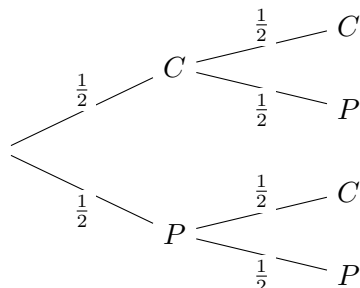


Exercice 1 – Croix ou pile : l'erreur de d'Alembert

7 points

- 1) Chaque lancer donne C ou P avec la probabilité $\frac{1}{2}$, quel que soit le résultat du lancer précédent (lancers indépendants).



- 2) Le chemin $C \rightarrow C$ a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

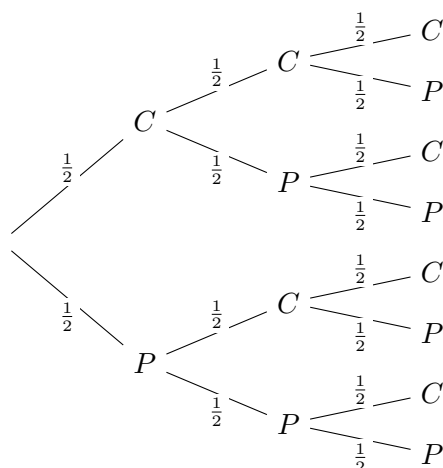
« Au moins une fois croix » est le contraire de « pile aux deux lancers », de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$:

$$P(\text{au moins une fois croix}) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

(On peut aussi additionner les trois chemins CC , CP et PC : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.)

- 3) D'Alembert compte trois cas, mais ils ne sont **pas équiprobables** : le cas « croix dès le premier lancer » regroupe en réalité deux chemins de l'arbre (CC et CP), il a pour probabilité $\frac{1}{2}$ et non $\frac{1}{3}$. Les quatre chemins CC , CP , PC , PP sont, eux, équiprobables, d'où $\frac{3}{4}$ et non $\frac{2}{3}$.

- 4) a. Arbre complété; il comporte $2 \times 2 \times 2 = \boxed{8}$ chemins, tous de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.



- b. Exactement deux fois croix : trois chemins, CCP , CPC et PCC , chacun de probabilité $\frac{1}{8}$:

$$P(\text{exactement deux croix}) = 3 \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Au moins une fois croix : contraire de PPP , de probabilité $\frac{1}{8}$:

$$P(\text{au moins une croix}) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

5) Avec $P(C) = 0,6$ et $P(P) = 1 - 0,6 = 0,4$ à chaque lancer :

$$P(CCC) = 0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,6^3 = \boxed{0,216}.$$

Exactement une fois croix : trois chemins (CPP , PCP , PPC), chacun de probabilité $0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 0,6 \times 0,16 = 0,096$:

$$P(\text{exactement une croix}) = 3 \times 0,096 = \boxed{0,288}.$$

Exercice 2 – Le dé du stand de kermesse

8 points

Le dé. Le dé est équilibré : chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$. $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{3; 6\}$, $C = \{6\}$, donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(C) = \frac{1}{6}$.

Affirmation 1. Vrai. Sachant que le résultat est pair, il y a trois issues possibles (2, 4, 6), dont une seule est un multiple de 3 : $P_A(B) = \frac{1}{3}$.
(Par la formule : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$, car $A \cap B = \{6\}$.)

Affirmation 2. Vrai. A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$. Or $P_A(B) = \frac{1}{3}$ (affirmation 1) et $P(B) = \frac{1}{3}$: savoir que le résultat est pair ne change pas la probabilité d'obtenir un multiple de 3.

Affirmation 3. Faux. Sachant que le résultat est pair, la probabilité d'obtenir 6 est $P_A(C) = \frac{1}{3}$, alors que $P(C) = \frac{1}{6}$. Comme $P_A(C) \neq P(C)$, les événements A et C ne sont pas indépendants.

Les joueurs. Tableau croisé des 200 joueurs :

	A gagné (G)	N'a pas gagné ($\bar{G}$)	Total
Enfant (E)	30	90	120
Adulte ($\bar{E}$)	20	60	80
Total	50	150	200

Affirmation 4. Vrai. Parmi les enfants : $P_E(G) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$; parmi les adultes : $P_{\bar{E}}(G) = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$.
Les deux probabilités conditionnelles sont égales : un enfant et un adulte ont la même

probabilité, $\frac{1}{4}$, de gagner un lot.

(On remarque que $P(G) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = P_E(G)$: les événements E et G sont indépendants.)

Affirmation 5. Faux. $P_G(E)$ est la probabilité d'être un enfant sachant que l'on a gagné : $P_G(E) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$. Et $P_E(G) = \frac{1}{4}$ (affirmation 4). Comme $\frac{3}{5} \neq \frac{1}{4}$, l'égalité est fautive : les deux conditionnements ne portent pas sur la même population (50 gagnants d'un côté, 120 enfants de l'autre).

Question 6. Non, l'élève n'a pas raison. Le nombre $\frac{14}{60}$ est une **fréquence observée** sur 60 lancers : elle fluctue d'une série de lancers à l'autre. La probabilité d'obtenir 6 est une **hypothèse du modèle** choisi : pour un dé supposé équilibré, elle vaut $\frac{1}{6}$ (et $\frac{14}{60} = \frac{7}{30}$ n'est pas très éloigné de $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ sur seulement 60 lancers). On ne « mesure » pas une probabilité avec quelques dizaines de lancers ; avec un très grand nombre de lancers, la fréquence se rapprocherait de la probabilité. Si l'on doutait que le dé soit équilibré, il faudrait beaucoup plus de lancers pour l'estimer ; 60 lancers ne permettent pas de conclure qu'il est truqué.

Exercice 3 – Quatre tirs au but

5 points

1) Chaque tir n'a que deux issues, « réussi » (R , probabilité 0,8) ou « manqué » (M) : c'est une épreuve de Bernoulli. Les quatre tirs ont la même probabilité de succès et le résultat d'un tir n'influence pas les suivants : les quatre épreuves sont identiques et indépendantes, et l'on peut les représenter par un arbre à quatre niveaux (16 chemins). La probabilité qu'un tir soit manqué est $1 - 0,8 = \boxed{0,2}$.

2) Un seul chemin, $RRRR$: $P(RRRR) = 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 0,8^4 = \boxed{0,4096}$.

3) Exactement trois tirs réussis : le tir manqué peut être le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième, soit 4 chemins ($MRRR$, $RMRR$, $RRMR$, $RRRM$), chacun de probabilité $0,8^3 \times 0,2 = 0,512 \times 0,2 = 0,1024$:

$$P(\text{exactement trois réussis}) = 4 \times 0,1024 = \boxed{0,4096}.$$

(Curiosité : c'est exactement la même probabilité que celle de réussir les quatre tirs.)

4) « Au moins un tir réussi » est le contraire de « les quatre tirs manqués » ($MMMM$), de probabilité $0,2^4 = 0,0016$:

$$P(\text{au moins un réussi}) = 1 - 0,0016 = \boxed{0,9984}.$$

La joueuse a plus de 99 % de chances de marquer au moins une fois sur sa série de quatre tirs : il est presque certain qu'elle ne manque pas les quatre tirs.