

Exercice 1 – Automatismes

5 points

- 1) On lit l'arbre : sur la branche de A vers B , $P_A(B) = 0,2 = \boxed{\frac{1}{5}}$.

On multiplie les probabilités le long du chemin $A \rightarrow B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14 = \boxed{\frac{7}{50}}.$$

B est atteint par deux chemins, $A \rightarrow B$ et $\bar{A} \rightarrow B$ (formule des probabilités totales) :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,14 + 0,3 \times 0,1 = 0,14 + 0,03 = 0,17 = \boxed{\frac{17}{100}}.$$

Enfin, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,14}{0,17} = \boxed{\frac{14}{17}}.$$

À ne pas confondre : $P_A(B)$ est la probabilité de B quand on sait que A est réalisé; $P_B(A)$ celle de A quand on sait que B est réalisé; $P(A \cap B)$ celle que les deux soient réalisés.

- 2) Avec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, puis en développant le produit :

$$A = 4 - 16x + 16x^2 + (-3x^2 + 12x + x - 4) = 16x^2 - 3x^2 - 16x + 13x + 4 - 4 = \boxed{13x^2 - 3x}.$$

- 3) $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$, d'où

$$x^2 - 100 = 0 \iff (x - 10)(x + 10) = 0 \iff x = 10 \text{ ou } x = -10.$$

Les solutions sont $\boxed{-10 \text{ et } 10}$.

- 4) Une hausse de 80 % correspond au coefficient 1,8, une baisse de 90 % au coefficient 0,1. Les coefficients se multiplient :

$$1,8 \times 0,1 = 0,18 = 1 - 0,82.$$

Le prix a globalement $\boxed{\text{baissé de } 82 \%}$.

Exercice 2 – Des jetons dans un sac

8 points

- 1) Verts : 4 carrés donc 6 ronds; bleus : 10 carrés donc 2 ronds; noirs : 14 ronds donc 4 carrés. Il y a $10 + 12 + 18 = 40$ jetons.

	Vert	Bleu	Noir	Total
Carré	4	10	4	18
Rond	6	2	14	22
Total	10	12	18	40

2) En situation d'équiprobabilité, $P(E) = \frac{\text{nombre de jetons qui réalisent } E}{40}$.

$$P(A) = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4}} \quad P(B) = \frac{18}{40} = \boxed{\frac{9}{20}}.$$

Les jetons carrés qui ne sont pas bleus sont les 4 carrés verts et les 4 carrés noirs :

$$P(C) = \frac{4+4}{40} = \frac{8}{40} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

3) a. $A \cap B$: « le jeton est vert et carré ». Il y a 4 jetons verts carrés : $P(A \cap B) = \frac{4}{40} = \boxed{\frac{1}{10}}$.

b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{18}{40} - \frac{4}{40} = \frac{24}{40} = \boxed{\frac{3}{5}}$.

4) a. $\bar{A}$: « le jeton n'est pas vert », c'est-à-dire « le jeton est bleu ou noir ».

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

b. $\bar{A} \cap \bar{B}$: « le jeton n'est pas vert et n'est pas carré », c'est-à-dire « le jeton est rond, bleu ou noir » : $2 + 14 = 16$ jetons.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{16}{40} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

5) On sait que le jeton est carré : on se restreint aux 18 jetons carrés, dont 4 sont verts.

$$P_B(A) = \frac{4}{18} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

6) A et B sont indépendants si savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A , c'est-à-dire si $P_B(A) = P(A)$.

Or $P_B(A) = \frac{2}{9}$ et $P(A) = \frac{1}{4}$, et $\frac{2}{9} = \frac{8}{36} \neq \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants : savoir que le jeton est carré diminue (un peu) la probabilité qu'il soit vert.

Exercice 3 — Les dossiers d'une compagnie d'assurance

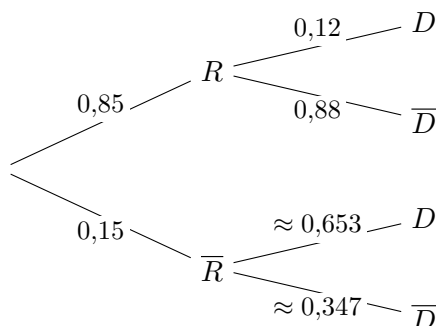
7 points

1) D'après l'énoncé, $P(R) = 0,85$ et $P_R(D) = 0,12$. Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 : $P(\bar{R}) = 1 - 0,85 = 0,15$ et $P_R(\bar{D}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

Pour la seconde partie de l'arbre, on utilise $P(D) = 0,2$: $P(R \cap D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$, donc

$$P(\bar{R} \cap D) = P(D) - P(R \cap D) = 0,2 - 0,102 = 0,098, \text{ d'où}$$

$$P_{\bar{R}}(D) = \frac{P(\bar{R} \cap D)}{P(\bar{R})} = \frac{0,098}{0,15} \approx 0,653 \quad \text{et} \quad P_{\bar{R}}(\bar{D}) \approx 1 - 0,653 = 0,347.$$



2) a. $P(R \cap D) = P(R) \times P_R(D) = 0,85 \times 0,12 = \boxed{0,102}.$

b. « Seulement des frais de réparation matérielle » : $R \cap \bar{D}.$

$$P(R \cap \bar{D}) = 0,85 \times 0,88 = \boxed{0,748}.$$

c. « Seulement des frais de dommages corporels » : $\bar{R} \cap D$, calculé à la question 1 :
 $P(\bar{R} \cap D) = 0,2 - 0,102 = \boxed{0,098}.$

d. « Ni l'un ni l'autre » : $\bar{R} \cap \bar{D}.$ On a $P(\bar{D}) = 1 - 0,2 = 0,8$, et $\bar{D}$ se partage entre $R \cap \bar{D}$ et $\bar{R} \cap \bar{D}$:

$$P(\bar{R} \cap \bar{D}) = P(\bar{D}) - P(R \cap \bar{D}) = 0,8 - 0,748 = \boxed{0,052}.$$

(Par l'arbre : $0,15 \times 0,347 \approx 0,052$, même résultat à l'arrondi près.)

e. On cherche $P_D(R)$:

$$P_D(R) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0,102}{0,2} = \boxed{0,51}.$$

Parmi les dossiers avec dommages corporels, 51 % comportent aussi des frais de réparation matérielle.