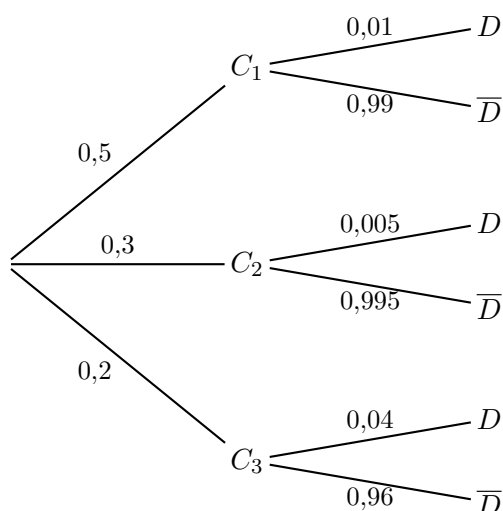


Exercice 1

9 points

Partie A

- 1) Les composants restants représentent $100 - 50 - 30 = 20\%$: $P(C_3) = 0,2$. On obtient l'arbre pondéré :



- 2) On cherche $P(C_3 \cap D)$:

$$P(C_3 \cap D) = P(C_3) \times P_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = \boxed{0,008}.$$

- 3) Les événements C_1, C_2, C_3 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + P(C_3 \cap D) \\
 &= 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,005 + 0,008 \\
 &= 0,005 + 0,0015 + 0,008 \\
 &= \boxed{0,0145}.
 \end{aligned}$$

- 4) On cherche $P_D(C_3)$:

$$P_D(C_3) = \frac{P(C_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,008}{0,0145} = \frac{16}{29} \approx \boxed{0,5517}.$$

Plus de la moitié des composants défectueux proviennent de la chaîne n° 3.

Partie B

- 1) Ici X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,0145)$: pour tout entier k entre 0 et 20, $P(X = k) = \binom{20}{k} \times 0,0145^k \times 0,9855^{20-k}$.

a. $P(X = 3) = \binom{20}{3} \times 0,0145^3 \times 0,9855^{17} = 1140 \times 0,0145^3 \times 0,9855^{17} \approx \boxed{0,0027}.$

b. « Pas plus de 2 composants défectueux » correspond à $X \leq 2$:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx \boxed{0,9971}$$

(à la calculatrice, fonction de répartition de la loi binomiale).

c. « Au moins un composant défectueux » est l'évènement contraire de « aucun composant défectueux » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9855^{20} \approx \boxed{0,2533}.$$

2) Pour un lot de n composants, $P(X = 0) = 0,9855^n$. On résout, pour n entier naturel :

$$0,9855^n > 0,65$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9855^n) > \ln(0,65) \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9855) > \ln(0,65)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,65)}{\ln(0,9855)} \quad (\text{on divise par } \ln(0,9855) < 0, \text{ l'ordre change})$$

Or $\frac{\ln(0,65)}{\ln(0,9855)} \approx 29,49$. Vérification : $0,9855^{29} \approx 0,6547 > 0,65$ et $0,9855^{30} \approx 0,6452 < 0,65$.

Le nombre maximum de composants dans un lot est donc $\boxed{29}$.

Partie C

Le coût de fabrication d'un composant prélevé au hasard est une variable aléatoire qui prend les valeurs 15, 12 et 9 avec les probabilités 0,5, 0,3 et 0,2. Son espérance vaut :

$$15 \times 0,5 + 12 \times 0,3 + 9 \times 0,2 = 7,5 + 3,6 + 1,8 = 12,9.$$

Le coût moyen de fabrication d'un composant est de $\boxed{12,90 \text{ euros}}$.

Exercice 2

12 points

Partie A

1) Le point $A(1; 3)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc $\boxed{f(1) = 3}$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \boxed{1}.$$

2) a. Comme $a > 0$, $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x . La fonction f est de la forme $\ln(u) + b$ avec $u(x) = ax^2 + 1$, $u'(x) = 2ax$, donc $f' = \frac{u'}{u}$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}}.$$

b. On traduit $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$:

$$\begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 - \ln(a+1) \\ 2a = a+1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 - \ln(2) \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $a = 1$ et $b = 3 - \ln(2)$ (on a bien $b \approx 2,31 > 0$).

Partie B

1) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x :

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln(2) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = f(x).$$

Donc f est paire : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, puis par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (ce qui est cohérent avec la parité de f).

3) D'après la partie A avec $a = 1$ (la constante $3 - \ln(2)$ a une dérivée nulle) :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

4) Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x$: $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

$$f(0) = \ln(1) + 3 - \ln(2) = 3 - \ln(2).$$

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$3 - \ln(2)$	$+\infty$

Le minimum de f est $3 - \ln(2)$, atteint en 0.

5) f est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $] -\infty ; 0[$, elle est strictement décroissante de $+\infty$ à $3 - \ln(2)$; sur $]0 ; +\infty[$, strictement croissante de $3 - \ln(2)$ à $+\infty$.

- si $k < 3 - \ln(2)$: aucune solution;
- si $k = 3 - \ln(2)$: une seule solution, $x = 0$;

- si $k > 3 - \ln(2)$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, exactement une solution dans $] -\infty ; 0[$ et exactement une dans $]0 ; +\infty[$.

L'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions si et seulement si $k > 3 - \ln(2)$, c'est-à-dire $k \in]3 - \ln(2) ; +\infty[$.

6) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \ln(2) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) &= 3 + \ln(2) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) &= 2\ln(2) = \ln(4) \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &= 4 & (\ln \text{ est strictement croissante}) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

Partie C

1) Graphiquement, la courbe traverse sa tangente (AB) au point A : $\mathcal{C}_f$ semble avoir un point d'inflexion d'abscisse 1. Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées (f est paire), on conjecture des points d'inflexion d'abscisses -1 et 1 .

2) $f' = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \text{ soit } f''(x) = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

3) $(x^2 + 1)^2 > 0$, donc $f''(x)$ est du signe du trinôme $2(1 - x)(1 + x) = -2(x - 1)(x + 1)$, négatif à l'extérieur des racines -1 et 1 .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

f est convexe là où $f'' \geq 0$: le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est $[-1; 1]$.

f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : la conjecture de la question 1) est confirmée.

4) Le coefficient directeur de (d_1) est $\frac{1}{2}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est parallèle à (d_1) si et seulement si $f'(x) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4x &= x^2 + 1 & (x^2 + 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0, \sqrt{12} = 2\sqrt{3} : \text{deux solutions}$$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Oui : il existe deux points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (d_1) , d'abscisses

$$2 - \sqrt{3} \approx 0,27 \quad \text{et} \quad 2 + \sqrt{3} \approx 3,73.$$

Exercice 3

10 points

Partie A

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

- 2) Pour tout $x \in]0; 1]$, la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$ et celle de $\ln$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - xe^{-x}}{x}.$$

- 3) Soit $x \in]0; 1]$. On a $0 < x \leq 1$ et, comme $-x < 0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, $0 < e^{-x} < e^0 = 1$. En multipliant ces inégalités entre nombres positifs :

$$xe^{-x} < 1 \times 1, \quad \text{soit} \quad xe^{-x} < 1.$$

Donc $1 - xe^{-x} > 0$ et, comme $x > 0$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 1]$: f est strictement croissante sur $]0; 1]$.
De plus $f(1) = e^{-1} + \ln(1) = e^{-1}$.

x	0	1
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	e^{-1}

(La fonction f n'est pas définie en 0 : $-\infty$ est la limite en 0.)

- 4) Sur $]0; 1]$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = e^{-1} \approx 0,368 > 0$. Ainsi $0 \in]-\infty; e^{-1}]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution L dans $]0; 1]$.

À la calculatrice : $f(0,567) \approx -0,0002 < 0$ et $f(0,568) \approx 0,0010 > 0$, donc

$$0,567 < L < 0,568.$$

Partie B

1) a. $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} \approx 0,368$ et $b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1} \approx 0,905$.

b. Fonction complétée (la variable c garde la nouvelle valeur de a pendant qu'on calcule b_{k+1} avec l'ancienne valeur de a) :

```

1 from math import exp
2 def termes(n) :
3     a = 1/10
4     b = 1
5     for k in range(0,n) :
6         c = exp(-b)
7         b = exp(-a)
8         a = c
9     return (a , b)

```

Vérification : `termes(1)` renvoie $(0,3678\dots; 0,9048\dots)$, c'est-à-dire $(a_1; b_1)$, et `termes(2)` renvoie $(0,4046\dots; 0,6922\dots)$.

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$ ».

Initialisation. $a_0 = 0,1, a_1 \approx 0,368, b_1 \approx 0,905$ et $b_0 = 1$: on a bien $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. La fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$: appliquée à des nombres rangés dans un ordre, elle renvoie des images rangées dans l'ordre contraire.

$$\begin{aligned}
 & a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\
 \implies & e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \quad (g \text{ est décroissante}) \\
 \iff & b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq a_{n+2} \geq a_{n+1} \quad (\text{définition des suites})
 \end{aligned}$$

De plus $a_{n+1} = e^{-b_n} > 0$ (une exponentielle est strictement positive) et $b_{n+1} \leq 1$ d'après $P(n)$. Ainsi $0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

b. D'après la question précédente, pour tout n :

- $a_n \leq a_{n+1}$: la suite (a_n) est croissante; et $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq 1$: elle est majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, (a_n) converge.
- $b_{n+1} \leq b_n$: la suite (b_n) est décroissante; et $b_n \geq b_{n+1} \geq a_{n+1} > 0$: elle est minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, (b_n) converge.

- 3) a. $A \in]0; 1]$, donc $f(A)$ est défini, et, puisque $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$:

$$f(A) = e^{-A} + \ln(A) = B + \ln(e^{-B}) = B - B, \quad \text{donc} \quad \boxed{f(A) = 0}.$$

- b. De même, $B \in]0; 1]$ et $f(B) = e^{-B} + \ln(B) = A + \ln(e^{-A}) = A - A = 0$.

D'après la partie A, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution L dans $]0; 1]$. Donc $A = L$ et $B = L$, d'où

$$\boxed{A - B = 0}.$$

Les deux suites ont la même limite $L \approx 0,567$ (vérification avec termes (50) : $a_{50} \approx b_{50} \approx 0,567143$).

Exercice 4

9 points

Partie A

Dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$: $B(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $A(0; 0; 1)$.

1) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, donc

$$I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad K\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right).$$

2) J est le milieu de $[AD]$:

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

donc $J\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{BD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD},$$

donc $L\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.

3) $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{KL}$: les vecteurs sont colinéaires.

Les droites (IJ) et (KL) sont donc parallèles; deux droites parallèles sont contenues dans un même plan, donc I, J, K et L sont coplanaires.

4) Les droites (IK) et (JL) sont contenues dans le plan (IJK) qui contient aussi L . On a

$$\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JL} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\overrightarrow{IK} = \lambda \overrightarrow{JL}$, la première coordonnée donnerait $\lambda = 1$ et la deuxième $0 = -\frac{1}{4}\lambda$, soit $\lambda = 0$: impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes : (IK) et (JL) sont sécantes en un point P .

5) Représentations paramétriques (t et s réels) :

$$(IK) : \begin{cases} x = \frac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (JL) : \begin{cases} x = \frac{3}{4}s \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s \end{cases}$$

Le point P correspond à des valeurs t et s telles que :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}t = \frac{3}{4}s \\ 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s \end{cases} \iff \begin{cases} t = s \\ s = 2 \end{cases} \iff t = s = 2.$$

D'où $P\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

Avec $A(0; 0; 1)$ et $C(1; 0; 0)$:

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $P \in (AC)$. Les droites (IK) , (JL) et (AC) sont concourantes en P .

Partie B

1) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $2x > 0$ et :

$$\begin{aligned} f(2x) &= 4 \ln(6x) = 4 \ln(2 \times 3x) = 4 (\ln(2) + \ln(3x)) \\ &= 4 \ln(2) + 4 \ln(3x) = \ln(2^4) + f(x) = \ln(16) + f(x). \end{aligned}$$

L'affirmation est **vraie**.

2) En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) = 5 > 0$, donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.

En $+\infty$: forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x \left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{5}{x}}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{x}} = 1$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3) Les termes sont strictement positifs. Par récurrence : $a_0 = 1 > 0$; si $a_n > 0$, alors $a_{n+1} = a_n \times \frac{e^n}{e^n + 1}$ est un produit de nombres strictement positifs, donc $a_{n+1} > 0$. Ainsi $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens de variation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = a_n \left(\frac{e^n}{e^n + 1} - 1 \right) = a_n \times \frac{e^n - e^n - 1}{e^n + 1} = -\frac{a_n}{e^n + 1} < 0,$$

car $a_n > 0$ et $e^n + 1 > 0$. La suite (a_n) est donc **strictement décroissante**.

(Vérification : $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 \approx 0,3655$, $a_3 \approx 0,3220$.)