

Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

9 points

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- la moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2;
- les composants restants sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.

On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 »;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 »;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 »;
- D l'évènement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie A

- 1) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
- 2) Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.
- 3) Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0,0145$.
- 4) Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

Partie B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.

Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$.

- 1) Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
 - a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
 - b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède pas plus de 2 composants défectueux.
 - c. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

- 2) Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,65. Quel nombre maximum de composants doit-il y avoir dans un lot pour respecter le souhait du directeur ? Justifier le résultat par un calcul.

Partie C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, de 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et de 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

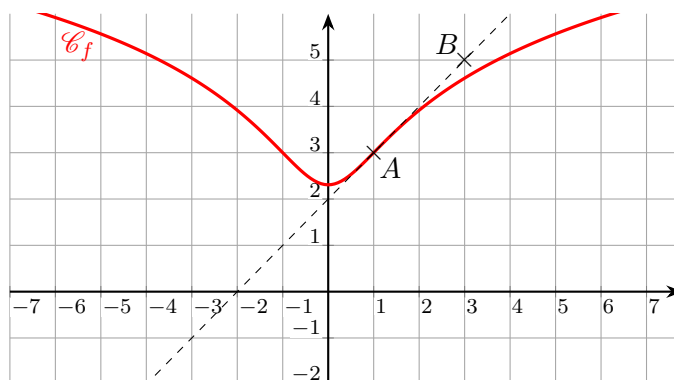
Exercice 2

12 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.

On donne ci-contre $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

- 1) Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
- 2) La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels strictement positifs.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

- 1) Montrer que f est une fonction paire.
- 2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
- 4) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 5) À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.
- 6) Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

- 1) Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 2) Déterminer l'expression de $f''(x)$.
- 3) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
- 4) On considère la droite (d_1) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite (d_1) ? Si oui, préciser les abscisses de ces points.

Exercice 3

10 points

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0; 1]$ par : $f(x) = e^{-x} + \ln(x)$.

- 1) Calculer la limite de f en 0.
- 2) On admet que f est dérivable sur $]0; 1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a : $f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$.
- 3) Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0; 1]$.
- 4) Démontrer qu'il existe un unique réel L appartenant à $]0; 1]$ tel que $f(L) = 0$.
Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de L à 10^{-3} près.

Partie B

- 1) On définit deux suites (a_n) et (b_n) par : $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases}$ et, pour tout entier naturel n , $\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$

- a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près.
- b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```

1 def termes(n) :
2     a = 1/10
3     b = .....
4     for k in range(0,n) :
5         c = .....
6         b = .....
7         a = c
8     return (..... , .....)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

On rappelle que la fonction exponentielle s'écrit `exp()` en Python.

- 2) On rappelle que la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3) On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n) .

On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0; 1]$, et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.

a. Démontrer que $f(A) = 0$. La fonction f est celle étudiée dans la partie A.

b. Déterminer $A - B$.

Exercice 4

9 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$.

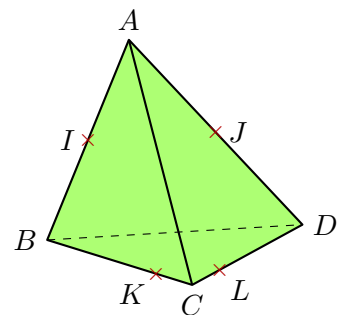
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AD]$.

Les points K et L sont tels que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que les trois droites (IK) , (JL) et (AC) sont concourantes.

On se place dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.



- 1) Donner sans justification les coordonnées des points I et K dans le repère choisi.
- 2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BL}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}$ puis en déduire les coordonnées des points J et L dans le repère choisi.
- 3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, puis en déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.
- 4) Justifier que les droites (IK) et (JL) sont sécantes en un point que l'on appellera P .
- 5) Prouver que $P \in (AC)$ et donner les coordonnées de P dans le repère choisi.
On a ainsi prouvé que les trois droites (IK) , (JL) et (AC) sont concourantes en P .

Partie B

- 1) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(3x)$.
Est-il vrai que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f(2x) = f(x) + \ln(16)$?
Justifier précisément la réponse.
- 2) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(x)}{x+5}$.
Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- 3) On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n \times \frac{e^n}{e^n + 1}.$$

Étudier le sens de variation de cette suite.