

Exercice 1

10 points

Partie A : étude de la fonction auxiliaire g

1) $g(1) = 2(1 - 1) - 1 \times \ln(1) = 0 - 0$, donc $g(1) = 0$.

$g(e) = 2(e - 1) - e \ln(e) = 2e - 2 - e$, donc $g(e) = e - 2$ ($\approx 0,72$).

2) En 0^+ . $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2(x - 1) = -2$ et, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -2.$$

En $+\infty$. Forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on factorise par x . Pour tout $x > 0$,

$$g(x) = x \left(2 - \frac{2}{x} - \ln(x) \right).$$

Or $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $\ln(x) \rightarrow +\infty$, donc $2 - \frac{2}{x} - \ln(x) \rightarrow -\infty$. Comme $x \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

3) g est dérivable sur $]0; +\infty[$. La dérivée de $x \ln(x)$ est $1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$, d'où :

$$g'(x) = 2 - (\ln(x) + 1) = 1 - \ln(x).$$

$1 - \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ (la fonction $\exp$ est strictement croissante); $g'(e) = 0$.

Donc g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	-2	$e - 2$	$-\infty$

4) Sur $]0; e]$. g est continue et strictement croissante, à valeurs dans $] -2; e - 2]$, intervalle qui contient 0 : l'équation $g(x) = 0$ y admet une unique solution (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). Comme $g(1) = 0$ et $1 \in]0; e]$, cette solution est 1.

Sur $[e; +\infty[$. g est continue et strictement décroissante, $g(e) = e - 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Donc 0 est compris entre $e - 2$ et $-\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[e; +\infty[$ (et $\alpha \neq e$ puisque $g(e) \neq 0$).

L'équation $g(x) = 0$ a donc exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$: 1 et α .

Encadrement. À la calculatrice : $g(4,92) \approx 0,0009 > 0$ et $g(4,93) \approx -0,0050 < 0$, donc

$$4,92 < \alpha < 4,93.$$

5) On déduit des variations et des deux zéros :

x	0	1	α	$+\infty$	
$g(x)$	−	0	+	0	−

$g(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et sur $]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$ sur $]1; \alpha[$.

Partie B : étude de la fonction f

1) En $+\infty$. Forme indéterminée : on factorise par x . Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x \left(3 - \ln(x) - 2 \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; et $\ln(x) \rightarrow +\infty$. Donc la parenthèse tend vers $-\infty$ et, par produit avec $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

En 0^+ . $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (croissance comparée).

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \ln(x)) = +\infty$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

(La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.)

2) a. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 3 - (\ln(x) + 1) - \frac{2}{x} = 2 - \ln(x) - \frac{2}{x} = \frac{2x - x \ln(x) - 2}{x} = \frac{2(x-1) - x \ln(x)}{x},$$

donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ (question A.5). De plus $f(1) = 3 - 0 - 0 = 3$.

x	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	3	$f(\alpha)$	$-\infty$	

f est décroissante sur $]0; 1]$, croissante sur $[1; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, avec $f(\alpha) \approx 3,73$.

Remarque : comme $g(\alpha) = 0$, $\ln(\alpha) = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha}$, d'où $f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{4}{\alpha}$.

3) f' est dérivable sur $]0; +\infty[$; on dérive $f'(x) = 2 - \ln(x) - \frac{2}{x}$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \boxed{\frac{2-x}{x^2}}.$$

Comme $x^2 > 0$, $f''(x)$ a le signe de $2 - x$:

x	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
convexité de f	convexe		concave

f est **convexe** sur $]0; 2]$ et **concave** sur $[2; +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 2 : $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2, avec

$$f(2) = 6 - 2\ln(2) - 2\ln(2) = 6 - 4\ln(2).$$

Le point d'inflexion est $\boxed{I(2; 6 - 4\ln(2))}$ ($6 - 4\ln(2) \approx 3,23$).

Exercice 2

10 points

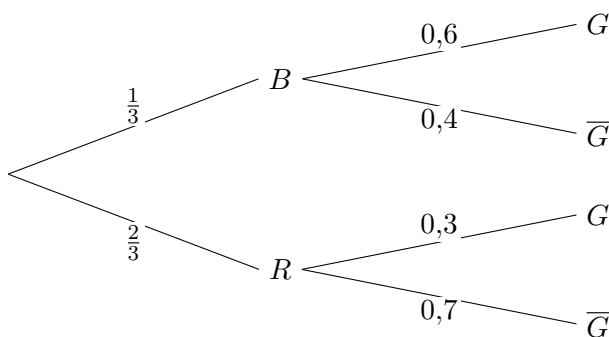
- 1) a. Si la case est blanche, on tire un seul jeton parmi cinq, dont trois sont impairs (1, 3, 5) :

$$P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

- b. Si la case est rouge, on tire successivement et sans remise deux jetons ; le joueur gagne si les deux sont impairs : $\frac{3}{5}$ pour le premier, puis il reste 2 jetons impairs sur 4 :

$$P_R(G) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,3.$$

- c. La roue compte 12 cases équiprobables : $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.



- 2) a. B et R forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(B) P_B(G) + P(R) P_R(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

- b. On cherche $P_G(B)$:

$$P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$$

- 3) $P(B \cap G) = 0,2$ tandis que $P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{2}{15} \approx 0,133$.

Comme $P(B \cap G) \neq P(B) \times P(G)$, les événements B et G ne sont pas indépendants.
(Autre justification : $P_B(G) = 0,6 \neq P(G) = 0,4$.)

- 4) a. Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de succès G (« le joueur gagne »), de probabilité $p = 0,4$. Les jetons étant remis après chaque partie, les dix parties sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, donc

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,4).$$

- b. $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7 = 120 \times 0,4^3 \times 0,6^7$, soit $P(X = 3) \approx 0,215$.

- c. $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,6331$, soit $P(X > 4) \approx 0,367$.

Interprétation : sur dix parties, le joueur a environ 36,7 % de chances de gagner au moins cinq parties (plus de quatre).

- 5) Sur n parties (indépendantes, de probabilité de gain 0,4), l'événement contraire de « gagner au moins une partie » est « perdre les n parties », de probabilité $0,6^n$. Donc $p_n = 1 - 0,6^n$.

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,6^n \geq 0,99 \\ &\iff 0,6^n \leq 0,01 \\ &\iff n \ln(0,6) \leq \ln(0,01) \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante}) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \quad (\text{on divise par } \ln(0,6) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. La plus petite valeur de n est $\boxed{n = 10}$.

Vérification : $p_9 = 1 - 0,6^9 \approx 0,9899 < 0,99$ et $p_{10} = 1 - 0,6^{10} \approx 0,99395 \geq 0,99$.

Exercice 3

10 points

1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 2 \times 1 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (non nuls) sont orthogonaux : $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A}$.

2) a. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : la deuxième de $\vec{AB}$ est nulle, pas celle de $\vec{AC}$) : $\boxed{\vec{n} \text{ est orthogonal au plan } (ABC)}$.

b. $\vec{n}$ est normal à (ABC) , donc une équation de (ABC) est de la forme $2x + y - z + d = 0$. Comme $A \in (ABC)$: $2 \times 2 + (-1) - 0 + d = 0$, d'où $d = -3$.

$$\boxed{(ABC) : 2x + y - z - 3 = 0}$$

c. Pour $S(0; 1; 4)$: $2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$, donc $S \notin (ABC)$: $\boxed{A, B, C \text{ et } S \text{ ne sont pas coplanaires}}$.

3) a. (d) est orthogonale à (ABC) , donc dirigée par $\vec{n}$, et passe par S :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. H est le point de (d) qui appartient à (ABC) : on cherche t tel que

$$2(2t) + (1 + t) - (4 - t) - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1.$$

D'où $\boxed{H(2; 2; 3)}$. Vérification : $2 \times 2 + 2 - 3 - 3 = 0$.

- 4) On prend pour base le triangle ABC , rectangle en A ; la hauteur associée est SH , puisque $(SH) = (d)$ est orthogonale au plan (ABC) .

$$AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30},$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

$$\overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ donc } SH = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = \frac{1}{3} \times \frac{30}{2} = \boxed{5} \text{ unités de volume.}$$

- 5) a. $\overrightarrow{SA} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc

$$SA = \sqrt{4 + 4 + 16} = \boxed{\sqrt{24} = 2\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad SB = \sqrt{9 + 4 + 4} = \boxed{\sqrt{17}}.$$

- b. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 6 + 4 + 8 = 18$.
Or $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos \widehat{ASB}$, donc

$$\cos \widehat{ASB} = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}} \approx 0,8911,$$

$$\text{d'où } \boxed{\widehat{ASB} \approx 27,0^\circ}.$$

Exercice 4

10 points

1) $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = \boxed{6}$ et $u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 30 - 8 + 6 = \boxed{28}$.

2) Au passage i de la boucle, on calcule u_i à partir de u_{i-1} : $u_i = 5u_{i-1} - 8(i-1) + 6$.

```

1 def suite_u(n):
2     u=0
3     for i in range(1,n+1):
4         u=5*u-8*(i-1)+6
5     return(u)

```

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n \geq 2n$ ».

Initialisation. $u_0 = 0 \geq 2 \times 0 = 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 &u_n \geq 2n \\
 \iff &5u_n \geq 10n && \text{(on multiplie par } 5 > 0\text{)} \\
 \iff &5u_n - 8n + 6 \geq 2n + 6 && \text{(on ajoute } -8n + 6\text{)} \\
 \iff &u_{n+1} \geq 2n + 6 \\
 \implies &u_{n+1} \geq 2(n+1) && \text{(car } 2n + 6 \geq 2n + 2\text{)}
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \geq 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geq 2n$ pour tout n ; par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

c. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, par définition, tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Avec $A = 10^p$: il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$.

(Par exemple, d'après 3.a., $n_0 = \frac{10^p}{2}$ convient, entier car $p \geq 1$: si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq 2n \geq 10^p$.)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6.$$

D'après 3.a., $u_n \geq 2n$, donc $4u_n \geq 8n$ et $4u_n - 8n + 6 \geq 6 > 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est (strictement) croissante.

5) a. La liste affichée contient $v_0, v_1, \dots, v_5$: 1, 5, 25, 125, 625, 3125. Chaque terme est le précédent multiplié par 5.

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5v_n$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 1 \\ &= 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 \\ &= 5u_n - 10n + 5 \\ &= 5(u_n - 2n + 1) = 5v_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{v_{n+1} = 5v_n}$: la suite (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 5^n = 5^n$. Comme $v_n = u_n - 2n + 1$, on a $u_n = v_n + 2n - 1$:

$$\boxed{u_n = 5^n + 2n - 1}.$$

Vérification : $u_0 = 1 + 0 - 1 = 0$, $u_1 = 5 + 2 - 1 = 6$, $u_2 = 25 + 4 - 1 = 28$.