

Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

10 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g .

- 1) Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ en justifiant votre démarche.
- 3) Déterminer les variations de g sur $]0; +\infty[$.
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$: 1 et α , avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
- 5) En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f et $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f .

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0^+ en justifiant votre démarche.
- 2)
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3) Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2

10 points

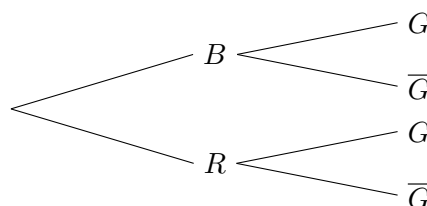
Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

- Un joueur fait une partie et on note B l'événement « la case obtenue est blanche », R l'événement « la case obtenue est rouge » et G l'événement « le joueur gagne la partie ».
 - Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
 - Prouver que $P_R(G) = 0,3$.
 - Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



- Montrer que $P(G) = 0,4$.
 - Un joueur gagne la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
- Les événements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
- Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
 - Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
 - Calculer $P(X > 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.
- Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ». Déterminer **par le calcul** la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3

10 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), \quad B(3; -1; 2), \quad C(0; 4; 1) \quad \text{et} \quad S(0; 1; 4).$$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
- 2)
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
- 3) Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 - b. Calculer les coordonnées du point H .
- 4) On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
- 5)
 - a. Calculer les longueurs SA et SB .
 - b. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 4

10 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Soit n un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n .

```
1 def suite_u(n):
2     u=...
3     for i in range(1,n+1):
4         u=...
5     return(u)
```

3) a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

4) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5) On considère la suite (v_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
1 def suite_v(n):
2     L=[]
3     for i in range(n+1):
4         L.append(suite_u(i)-2*i+1)
5     return(L)
```

La commande `L.append` permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste `L`. Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n . Démontrer cette conjecture.

b. En déduire, pour tout entier naturel n , la forme explicite de u_n en fonction de n .