

Exercice 1

5 points

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$.

- 1) a. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln(x)) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$.

Par quotient (« $-\infty$ divisé par 0^+ ») : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

- b. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Pour tout $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par produit et somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- c. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

- 2) a. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln(x))}{x^4} = \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln(x))}{x^4},$$

soit $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$.

- b. Pour $x > 0$:

$$-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante. L'ensemble des solutions est

$$S =]0; e^{-\frac{1}{2}}[\quad (e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61).$$

Comme $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $-1 - 2 \ln(x)$:

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]0; e^{-\frac{1}{2}}[, \quad f'(e^{-\frac{1}{2}}) = 0, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[.$$

- c. $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2} \approx 1,36$.

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$\frac{e}{2}$	0

3) a. Pour $x > 0$, $x^2 > 0$, donc :

$$f(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

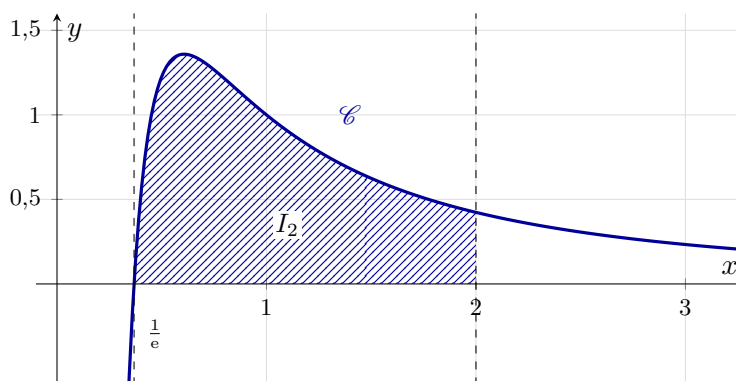
L'équation a une unique solution : $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

b. $f(x)$ a le signe de $1 + \ln(x)$, et $1 + \ln(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$ ($\ln$ strictement croissante).

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

$$f(x) < 0 \text{ sur }]0; \frac{1}{e}[\text{ et } f(x) > 0 \text{ sur }]\frac{1}{e}; +\infty[.$$

4) a. I_2 est l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = \frac{1}{e} \approx 0,37$ et $x = 2$:



b. D'après 3.b, $f(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$, donc $I_2 = \int_{1/e}^2 f(x) dx \geq 0$.

D'après le tableau de variations, le maximum de f sur $]0; +\infty[$ est $\frac{e}{2}$: pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}; 2\right]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{e}{2}$. Par positivité (croissance) de l'intégrale :

$$0 \leq I_2 \leq \int_{1/e}^2 \frac{e}{2} dx = \frac{e}{2} \left(2 - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{2}.$$

Donc $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$. (Graphiquement : le domaine est contenu dans le rectangle de largeur $2 - \frac{1}{e}$ et de hauteur $\frac{e}{2}$.)

c. Vérification de la primitive (admise) : $F'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x - (-2 - \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = f(x)$.

Pour $n \geq 1$, $f \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{e}; n\right]$, donc :

$$I_n = \int_{1/e}^n f(x) dx = F(n) - F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 - (-1)}{\frac{1}{e}} = \frac{-2 - \ln(n)}{n} + e.$$

$$I_n = e - \frac{2 + \ln(n)}{n}$$

Contrôle : $I_2 = e - \frac{2 + \ln 2}{2} \approx 1,372$, bien compris entre 0 et $e - \frac{1}{2} \approx 2,218$.

d. $\frac{2 + \ln(n)}{n} = \frac{2}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$.

Interprétation graphique : l'aire du domaine (non borné) compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$, pour $x \geq \frac{1}{e}$, vaut e unités d'aire.

Exercice 2

5 points

Repère : $A(0; 0; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $E(0; 0; 2)$.

1) a. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $H(0; 3; 2)$ et $G(5; 3; 2)$.

b. La droite (GH) passe par $H(0; 3; 2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2) a. $\overrightarrow{HM} = k \overrightarrow{HG}$ s'écrit $\begin{pmatrix} x_M - 0 \\ y_M - 3 \\ z_M - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $M(5k; 3; 2)$.

b. $C(5; 3; 0)$ (car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$), donc $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 5k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} 5k - 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k(5k - 5) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 25k^2 - 25k + 4.$$

c. Pour $k \in [0; 1]$, $M \neq A$ et $M \neq C$ (la cote de M vaut 2). Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, soit $25k^2 - 25k + 4 = 0$.

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \times 25 \times 4 = 625 - 400 = 225 = 15^2 > 0 :$$

$$k_1 = \frac{25 - 15}{50} = \frac{1}{5}, \quad k_2 = \frac{25 + 15}{50} = \frac{4}{5}.$$

Les deux valeurs sont dans $[0; 1]$: AMC est rectangle en M pour $k = \frac{1}{5}$ ou $k = \frac{4}{5}$.

Dans la suite, $M(1; 3; 2)$, ce qui correspond à $k = \frac{1}{5}$.

3) a. Les points $A(0; 0; 0)$, $C(5; 3; 0)$ et $D(0; 3; 0)$ ont tous une cote nulle et ne sont pas alignés : le plan (ACD) est le plan (ABD) de la base du parallélépipède. Le vecteur $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ lui est normal, et le plan passe par A :

$$(ACD) : z = 0$$

b. $K(1; 3; 0)$ a une cote nulle, donc $K \in (ACD)$.

$\overrightarrow{MK} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{AE}$ est colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{AE}$: la droite (MK) est orthogonale au plan (ACD) .

Donc K est le projeté orthogonal de M sur (ACD) .

- c. On prend pour base le triangle ACD , rectangle en D (angle d'une face rectangle $ABCD$), avec $AD = 3$ et $DC = AB = 5$:

$$\text{Aire}(ACD) = \frac{AD \times DC}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

La hauteur associée est $MK = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$. Donc :

$$V_{MACD} = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 2 = \boxed{5 \text{ unités de volume}}.$$

- 4) On calcule le volume du même tétraèdre en prenant pour base le triangle AMC ; la hauteur associée est alors DP .

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : AM = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}; \quad \overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : CM = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Le triangle AMC est rectangle en M (et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = -4 + 0 + 4 = 0$), donc :

$$\text{Aire}(AMC) = \frac{AM \times CM}{2} = \frac{\sqrt{14} \times 2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{70}.$$

Alors $V_{MACD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(AMC) \times DP$, soit $5 = \frac{\sqrt{70}}{3} \times DP$:

$$DP = \frac{15}{\sqrt{70}} = \boxed{\frac{3\sqrt{70}}{14} \approx 1,8}.$$

Vérification : un vecteur normal à (AMC) est $\vec{n}(3; -5; 6)$ ($\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 3 - 15 + 12 = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 - 15 + 0 = 0$), d'où $(AMC) : 3x - 5y + 6z = 0$ et $DP = \frac{|3 \times 0 - 5 \times 3 + 6 \times 0|}{\sqrt{9 + 25 + 36}} = \frac{15}{\sqrt{70}}.$

Exercice 3

5 points

Affirmation 1 : FAUSSE.

$f(x) = e^{2x} - 6x + 1$, donc $f'(x) = 2e^{2x} - 6$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 6 - 2e^{2x} + 12x - 2 = 12x - 8.$$

Par exemple en $x = 0$: $f'(0) - 2f(0) = -8$, alors que $-6 \times 0 + 1 = 1$. La fonction f n'est pas solution de (E).

(Une solution de (E) est par exemple $x \mapsto 3x + 1 + Ce^{2x}$: la fonction affine $3x + 1$ convient car $3 - 2(3x + 1) = -6x + 1$.)

Affirmation 2 : FAUSSE.

u_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{3}{4} \neq 1$:

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$: la limite est finie, et non $+\infty$.

Affirmation 3 : FAUSSE.

À la ligne 4, on ajoute $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ (et non $\left(\frac{3}{4}\right)^i$) : la boucle ajoute k fois le même nombre. `suite(50)` renvoie donc

$$50 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \approx 2,83 \times 10^{-5},$$

alors que $u_{50} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{51}\right) \approx 3,999\,998$. (Même en remplaçant k par i à la ligne 4, `range(50)` ne fait varier i que de 0 à 49 : la fonction renverrait u_{49} ; il faudrait `range(k+1)`.)

Affirmation 4 : VRAIE.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{a}{x} - 2$, donc $f'(1) = a - 2$.

La tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est nul : $f'(1) = 0 \iff a = 2$. La valeur $a = 2$ convient.

Affirmation 5 : VRAIE.

$g(x) = xe^{-x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}, \quad g''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $g''(x)$ a le signe de $x - 2$:

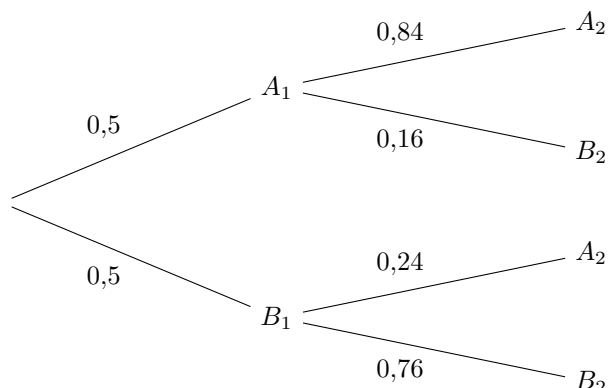
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+
g	concave		convexe

g'' s'annule **en changeant de signe** uniquement en $x = 2$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse 2 et d'ordonnée $g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$. C'est bien le point $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$.

Exercice 4

5 points

1) Arbre pondéré 1 complété ($P_{A_1}(A_2) = 0,84$, $P_{B_1}(B_2) = 0,76$, et les complémentaires) :



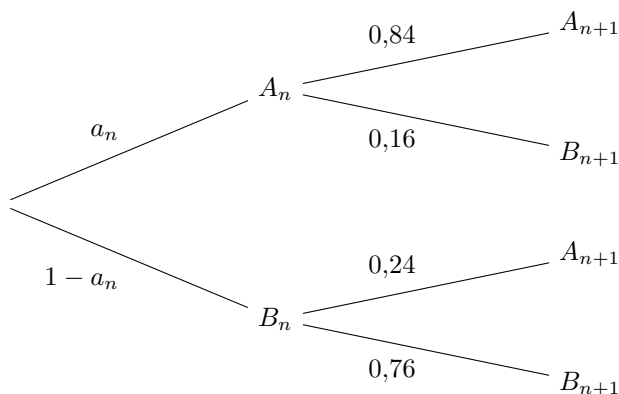
2) a. A_1 et B_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$a_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) = 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24 = 0,42 + 0,12 = \boxed{0,54}.$$

b. On cherche $P_{A_2}(B_1)$:

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,12}{0,54} = \frac{2}{9} \approx \boxed{0,222}.$$

3) a. Arbre pondéré 2 complété ($b_n = 1 - a_n$ car A_n et B_n sont contraires) :



b. A_n et B_n forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = 0,84 a_n + 0,24 (1 - a_n) = 0,84 a_n - 0,24 a_n + 0,24,$$

$$\text{soit } \boxed{a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24}.$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: $0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 = 0,5 = a_1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} &\iff 0,6 a_n = 0,36 - 0,1 \times 0,6^n && \text{(on multiplie par } 0,6 \neq 0) \\ &\iff 0,6 a_n + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n && \text{(on ajoute } 0,24) \\ &\iff a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n+1)-1} && \text{(question 3.b)} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5) Comme $-1 < 0,6 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$.

Interprétation : sur le long terme, la probabilité qu'un vélo se trouve au point A un matin donné se stabilise à 0,6; autrement dit, à long terme, environ 60 % des vélos se trouvent au point A le matin (et 40 % au point B).

6) Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n \geq 0,599 &\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leq 0,01 \\ &\iff (n-1) \ln(0,6) \leq \ln(0,01) && \text{(ln strictement croissante)} \\ &\iff n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} && \text{(on divise par } \ln(0,6) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,015$, donc $n \geq 10,015$ environ : le plus petit entier est $n = 11$.

Contrôle : $a_{10} \approx 0,59899 < 0,599$ et $a_{11} \approx 0,59940 \geq 0,599$.

Interprétation : c'est à partir du 11^e matin que la probabilité qu'un vélo soit au point A atteint au moins 0,599 (la proportion de vélos au point A est alors à moins d'un millièrme de sa valeur limite 0,6).