

Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

5 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe, à la fin du sujet.

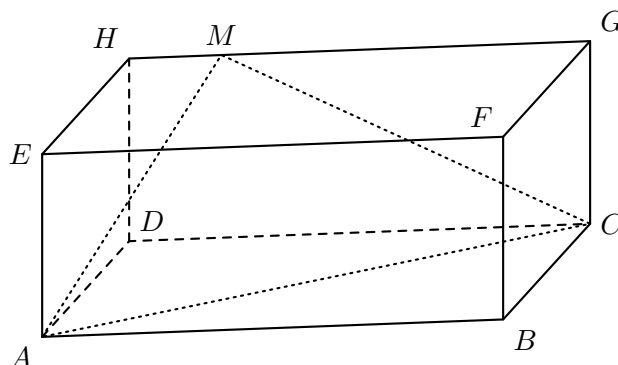
- 1)
 - a. Étudier la limite de f en 0;
 - b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$;
 - c. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des asymptotes ? Le cas échéant, préciser leurs équations.
- 2)
 - a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$.
 - b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3)
 - a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ possède un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont on précisera les coordonnées;
 - b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 4) Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.
 - a. Hachurer l'aire mesurée par I_2 sur le graphique de l'annexe;
 - b. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.
On admet que la fonction F , définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Calculer I_n en fonction de n ;
 - d. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 2

5 points

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B , D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.



- 1)
 - a. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G .
 - b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH) .
- 2) Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k \overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k; 3; 2)$.
 - b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
 - c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1; 3; 2)$.

On admet que le triangle AMC est rectangle en M .

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

- 3) On considère le point K de coordonnées $(1; 3; 0)$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD) .
 - b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD) .
 - c. En déduire le volume du tétraèdre $MACD$.
- 4) On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC) . Calculer la distance DP , puis en donner une valeur arrondie à 10^{-1} .

Exercice 3

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E) .

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.

L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50} .

```
1 def suite(k):
2     S=0
3     for i in range(k):
4         S=S+(3/4)**k
5     return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = a \ln(x) - 2x.$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 5 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$.

Le point $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g .

Exercice 4

5 points

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84;
- Si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit les évènements suivants :

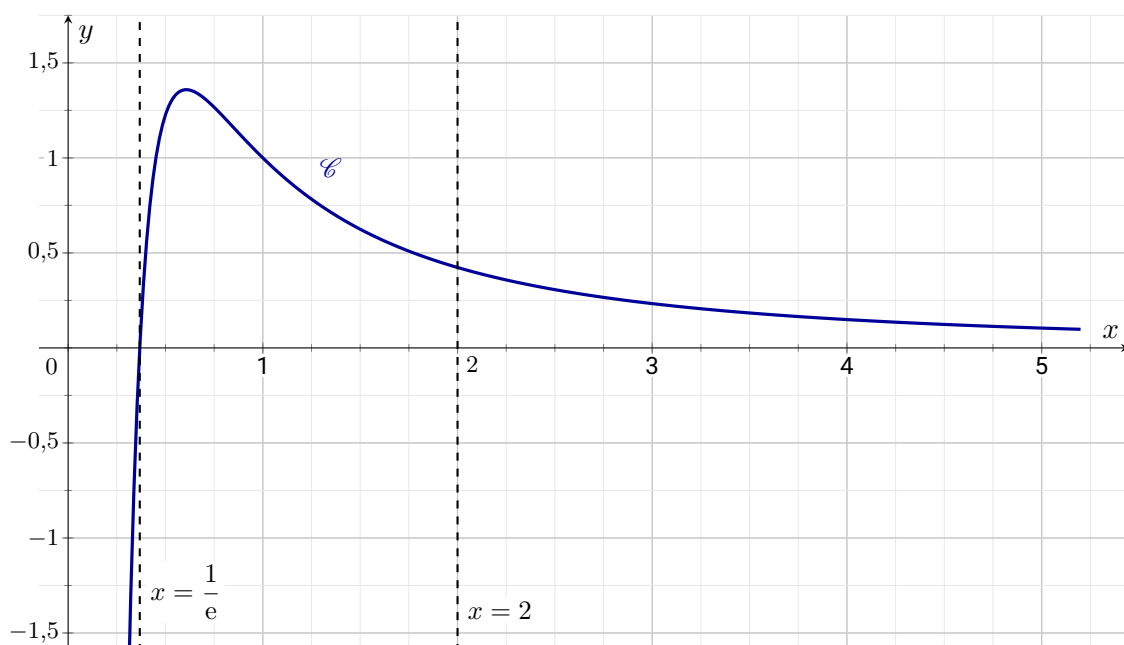
- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin » ;
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n . Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

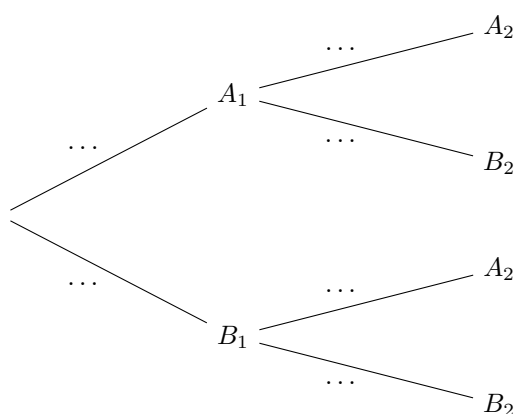
- 1) Compléter l'arbre pondéré 1 de l'annexe qui modélise la situation pour les deux premiers matins ;
- 2)
 - a. Calculer a_2 .
 - b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
- 3)
 - a. Compléter l'arbre pondéré 2 de l'annexe qui modélise la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième matins.
 - b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24$.
- 4) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
- 5) Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
- 6) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Annexe

Exercice 1 – Courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$



Exercice 4 – Arbre pondéré 1



Exercice 4 – Arbre pondéré 2

