

Exercice 1

5 points

Partie A

- 1) La fonction $g : x \mapsto ax e^{-\frac{1}{4}x}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables, et

$$g'(x) = a e^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x} = \left(a - \frac{ax}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x}.$$

Donc

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = \left(a - \frac{ax}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{ax}{4} e^{-\frac{1}{4}x} = a e^{-\frac{1}{4}x}.$$

Ainsi g est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \geq 0$, $a e^{-\frac{1}{4}x} = 20 e^{-\frac{1}{4}x}$, c'est-à-dire (comme $e^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$) :

$$\boxed{a = 20}, \quad g(x) = 20x e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- 2) (E') s'écrit $y' = -\frac{1}{4}y$, équation de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{1}{4}$. Ses solutions sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto K e^{-\frac{1}{4}x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

- 3) Une fonction f dérivable est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E') . En effet, comme $g' + \frac{1}{4}g = 20 e^{-\frac{1}{4}x}$:

$$f' + \frac{1}{4}f = 20 e^{-\frac{1}{4}x} \iff f' + \frac{1}{4}f = g' + \frac{1}{4}g \iff (f - g)' + \frac{1}{4}(f - g) = 0.$$

Donc $f - g : x \mapsto K e^{-\frac{1}{4}x}$ avec $K \in \mathbb{R}$, et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto (20x + K) e^{-\frac{1}{4}x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

- 4) $f(0) = (20 \times 0 + K) e^0 = K$, donc $f(0) = 8 \iff K = 8$:

$$\boxed{f(x) = (20x + 8) e^{-\frac{1}{4}x}.$$

Partie B

- 1) a. On dérive le produit $u \times v$ avec $u(x) = 20x + 8$, $u'(x) = 20$, $v(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$, $v'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$:

$$f'(x) = 20 e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}(20x + 8) e^{-\frac{1}{4}x} = (20 - 5x - 2) e^{-\frac{1}{4}x} = \boxed{(18 - 5x) e^{-\frac{1}{4}x}}.$$

Autre méthode : f est solution de (E) , donc $f'(x) = 20 e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}f(x)$, ce qui donne le même résultat.

- b. Pour tout $x \geq 0$, $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $18 - 5x$, qui s'annule en $x = \frac{18}{5} = 3,6$:

$$f'(x) > 0 \text{ sur } \left[0; \frac{18}{5}\right[\text{ et } f'(x) < 0 \text{ sur } \left]\frac{18}{5}; +\infty\right[.$$

Le maximum vaut

$$f\left(\frac{18}{5}\right) = \left(20 \times \frac{18}{5} + 8\right) e^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = \boxed{80 e^{-\frac{9}{10}}} \approx 32,53.$$

Avec $f(0) = 8$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (admis) :

x	0	$\frac{18}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	8	$80 e^{-\frac{9}{10}}$	0

- 2) a. Sur $[14; 15] \subset \left[\frac{18}{5}; +\infty\right]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$$f(14) = 288 e^{-3,5} \approx 8,70 \text{ et } f(15) = 308 e^{-3,75} \approx 7,24, \text{ donc } 8 \in [f(15); f(14)].$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α dans $[14; 15]$.

- b. On exécute la boucle tant que $b - a > 0,1$ (valeurs de $f(m)$ arrondies au centième) :

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
$f(m)$	$\approx 7,94$	$\approx 8,31$	$\approx 8,12$	$\approx 8,03$	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

À la dernière colonne, $b - a = 0,0625 \leq 0,1$: la boucle s'arrête et la fonction renvoie $(14,4375; 14,5)$.

- c. À chaque étape, $f(a) > 8 \geq f(b)$: comme f est décroissante, α reste dans $[a; b]$, intervalle dont on divise la longueur par 2.

La fonction `solution_equation` détermine donc, par **dichotomie**, un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1. Ici :

$$\boxed{14,4375 \leq \alpha \leq 14,5}.$$

Exercice 2

5 points

1) a. $D(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $G(1; 1; 1)$.

b. $\vec{IG} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\frac{3}{4}\vec{IG} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. En notant $L(x; y; z)$:

$$\vec{IL} = \frac{3}{4}\vec{IG} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ y - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ z - 0 = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{7}{8} \\ y = \frac{7}{8} \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc $L\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.

2) On vérifie que les trois points non alignés B, D, G satisfont l'équation $x + y - z - 1 = 0$:

- $B: 1 + 0 - 0 - 1 = 0$;
- $D: 0 + 1 - 0 - 1 = 0$;
- $G: 1 + 1 - 1 - 1 = 0$.

B, D, G ne sont pas alignés ($\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires), ils définissent un unique plan, et $x + y - z - 1 = 0$ est l'équation d'un plan qui les contient : c'est donc une équation du plan (BDG) .

3) a. D'après l'équation cartésienne, $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BDG) . La droite Δ , perpendiculaire à ce plan, a donc $\vec{n}$ pour vecteur directeur; elle passe par $L\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Pour $t = -\frac{7}{8}$: $x = 0, y = 0, z = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8}$. Donc $K\left(0; 0; \frac{13}{8}\right) \in \Delta$.

La droite (AE) est l'ensemble des points de coordonnées $(0; 0; z)$, $z \in \mathbb{R}$ (axe de vecteur $\vec{AE}$): $K \in (AE)$.

Les vecteurs directeurs $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Ainsi Δ et (AE) sont sécantes en $K\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.

c. L appartient au plan (BDG) : $\frac{7}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{14 - 6 - 8}{8} = 0$.

De plus L et K sont sur Δ , donc $(KL) = \Delta$ est orthogonale au plan (BDG) .
 L est le point du plan (BDG) tel que $(KL) \perp (BDG)$:

L est le projeté orthogonal de K sur le plan (BDG) .

4) a. $\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} - \frac{13}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$ et le repère est orthonormé, donc

$$KL = \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(-\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{3 \times \frac{49}{64}} = \boxed{\frac{7\sqrt{3}}{8}} \approx 1,52.$$

b. Le triangle DBG est équilatéral, donc la médiane $[GI]$ est aussi la hauteur relative à $[DB]$.

$$DB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad GI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\mathcal{A}_{DBG} = \frac{DB \times GI}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

c. L étant le projeté orthogonal de K sur (BDG) , $[KL]$ est la hauteur du tétraèdre $KDBG$ relative à la base DBG :

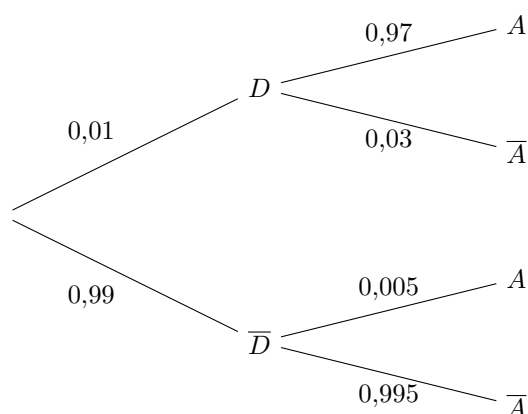
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{DBG} \times KL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{7 \times 3}{48} = \boxed{\frac{7}{16}} \text{ unité de volume.}$$

Exercice 3

5 points

Partie A

- 1) D'après l'énoncé : $P(D) = 0,01$, $P_D(A) = 0,97$ et $P(A) = 0,014\,65$. Arbre complété (les valeurs 0,005 et 0,995 sont obtenues à la question 3) :



- 2) a. $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,01 \times 0,97 = \boxed{0,009\,7}$.

b. $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0,009\,7}{0,014\,65} \approx \boxed{0,662}$.

- 3) D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)$, donc

$$P(\overline{D} \cap A) = 0,014\,65 - 0,009\,7 = 0,004\,95 \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})} = \frac{0,004\,95}{0,99} = \boxed{0,005}.$$

- 4) L'alarme ne fonctionne pas normalement lors de l'événement $(D \cap \overline{A}) \cup (\overline{D} \cap A)$, réunion de deux événements incompatibles :

$$P(D \cap \overline{A}) = 0,01 \times 0,03 = 0,000\,3, \quad P(\overline{D} \cap A) = 0,004\,95.$$

La probabilité cherchée vaut $0,000\,3 + 0,004\,95 = 0,005\,25 < 0,01$.

☐ Oui : il y a moins de 1 % de chance que l'alarme ne fonctionne pas normalement (environ 0,5 %).

Partie B

- 1) Le choix d'un système est une épreuve de Bernoulli de succès S « l'alarme ne fonctionne pas normalement », de probabilité $p = 0,005\,25$.

On répète 5 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), et X compte le nombre de succès.

Donc X suit la .

2) $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,005\,25 \times 0,994\,75^4 \approx \boxed{0,025\,7}$.

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,994\,75^5 \approx \boxed{0,026\,0}$.

Partie C

Le nombre Y de systèmes défaillants parmi n suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,005\,25)$, donc $P(Y \geq 1) = 1 - 0,994\,75^n$.

$$1 - 0,994\,75^n > 0,07 \iff 0,994\,75^n < 0,93 \iff n \ln(0,994\,75) < \ln(0,93) \iff n > \frac{\ln(0,93)}{\ln(0,994\,75)}$$

(on a divisé par $\ln(0,994\,75) < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité). Or $\frac{\ln(0,93)}{\ln(0,994\,75)} \approx 13,79$.

Vérification : pour $n = 13$, $1 - 0,994\,75^{13} \approx 0,066\,1 < 0,07$; pour $n = 14$, $1 - 0,994\,75^{14} \approx 0,071\,0 > 0,07$.

Le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 14}$.

Exercice 4

5 points

Partie A : étude d'une fonction

- 1) a. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$, on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

- b. Pour tout réel x , $(x - 1)^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- 2) Pour $x > 0$: $x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ avec $x^2 > 0$ et $1 + \frac{1}{x^2} > 0$, donc

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

et $f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

- 3) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par composition (ln continue en 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$.
• $x - 2\ln(x) = x \left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ et, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\ln(x)) = +\infty$.

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B : étude d'une suite

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation. $u_0 = 7$ et $u_1 = 7 - \ln(50) \approx 3,09$. On a bien $0 \leq u_1 \leq u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle conserve l'ordre :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} \leq u_n &\implies f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad (f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\iff 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad (\text{car } f(0) = 0 - \ln 1 = 0) \end{aligned}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire; par récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- 2) D'après la question 1, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 0.
D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

3) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et $u_{n+1} = f(u_n)$: la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$\ell - \ln(\ell^2 + 1) = \ell \iff \ln(\ell^2 + 1) = 0 \iff \ell^2 + 1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Donc $\boxed{\ell = 0}$.

Partie C : calcul intégral

1) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$: f est positive sur $[0; +\infty[$ (et même strictement positive sur $]0; +\infty[$, f étant strictement croissante).

2) f est continue et positive sur $[2; 4]$, donc I est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

3) Les fonctions sont continues sur $[2; 4]$ et $2 \leq 4$: l'intégration conserve l'ordre, donc

$$\int_2^4 (0,5x - 1) dx \leq I \leq \int_2^4 (0,25x + 0,25) dx.$$

$$\int_2^4 (0,5x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_2^4 = (4 - 4) - (1 - 2) = 1,$$

$$\int_2^4 (0,25x + 0,25) dx = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} \right]_2^4 = (2 + 1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2.$$

D'où $\boxed{1 \leq I \leq 2}$. (Valeur approchée : $I \approx 1,45$.)