

Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

5 points

Partie A

On considère l'équation différentielle d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- 1) Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = a x e^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
- 2) On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

- 3) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 4) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 1)
 - a. Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$.
 - b. En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 2) Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14; 15]$.

- b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```

from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b = 14,15
    while b - a > 0.1 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b

```

- c. Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Exercice 2

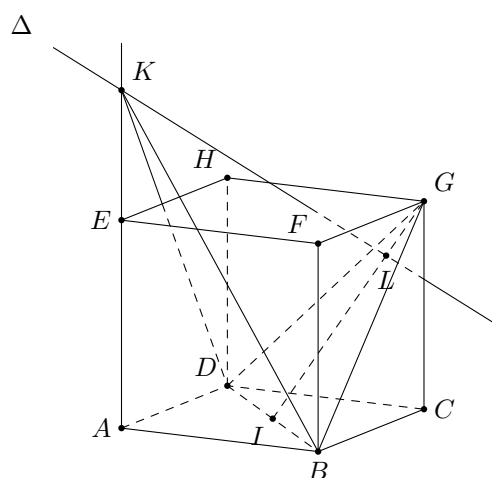
5 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

Le point I est le milieu du segment $[BD]$.

On définit le point L tel que $\vec{IL} = \frac{3}{4} \vec{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- 1) a. Préciser les coordonnées des points D , B , I et G .
Aucune justification n'est attendue.
- b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.

2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3) On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L .

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4) a. Calculer la distance KL .

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.

Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre $KDBG$.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Exercice 3

5 points

Partie A

Dans une entreprise, le système d'alarme fonctionne de manière que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.

La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On introduit les événements A : « l'alarme s'active » et D : « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'événement contraire d'un événement M , et $P(M)$ la probabilité de l'événement M .

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
- 2) a. Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active.
Arrondir le résultat à 10^{-3} .
- 3) Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
- 4) On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente mais qu'elle s'active malgré tout.

Peut-on affirmer qu'il y a moins de 1 % de chance que l'alarme ne fonctionne pas normalement ? Justifier.

Partie B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet dans cette partie que $P(S) = 0,00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

- 1) Donner, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X et préciser ses paramètres.
- 2) Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
- 3) Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Exercice 4

5 points

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

- 1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
 - b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.
- 3) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 2) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
- 3) On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C : calcul intégral

- 1) Étudier le signe de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- 2) Interpréter graphiquement l'intégrale : $I = \int_2^4 f(x) \, dx$.
- 3) On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2; 4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

En déduire l'encadrement : $1 \leq I \leq 2$.