

Exercice 1

8 points

1) On calcule un vecteur directeur de (AB) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Propositions **a.** et **d.** : les vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ (deuxième coordonnée nulle alors que celle de $\overrightarrow{AB}$ vaut 1) : on élimine.
- Proposition **b.** : le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (troisième coordonnée nulle) : on élimine.
- Proposition **c.** : pour $t = 0$, on obtient $(1; 0; 3)$, c'est le point A ; pour $t = 1$, on obtient $(4; 1; 0)$, c'est le point B . La droite décrite passe par A et B .

Réponse **c.**

2) On calcule $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-0 \\ -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$

S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on aurait $-3 = 3k$ donc $k = -1$, et $1 = 1 \times k$ donc $k = 1$: c'est contradictoire.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés (**a.** est fausse), donc **ils définissent un plan.**

- **b.** est fausse : le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \neq (-2; 1; -4)$.
- **d.** est fausse : trois points sont toujours coplanaires.

Réponse **c.**

3) On cherche s'il existe un réel t donnant les coordonnées du point.

- $M(7; 6; 6)$: $6t = 6$ donne $t = 1$, mais alors $z = 4 - 2 = 2 \neq 6$. $M \notin (d)$.
- $N(3; 6; 4)$: $3 + 4t = 3$ donne $t = 0$, mais alors $y = 0 \neq 6$. $N \notin (d)$.
- $P(4; 6; -2)$: $6t = 6$ donne $t = 1$, mais alors $x = 7 \neq 4$. $P \notin (d)$.
- $R(-3; -9; 7)$: $\begin{cases} 3 + 4t = -3 \\ 6t = -9 \\ 4 - 2t = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1,5 \\ t = -1,5 \\ t = -1,5 \end{cases}$: le même paramètre $t = -1,5$ convient, donc $R \in (d)$.

Réponse **d.**

4) Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de (d') est $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

S'il existait λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, on aurait $\lambda = \frac{4}{3}$ (abscisses) et $\lambda = -3$ (ordonnées) : impossible. Les droites ne sont **pas parallèles** (ni confondues).

On cherche un point commun : on résout le système

$$\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ 4 - 2t = 1 + k \end{cases}$$

La troisième équation donne $k = 3 - 2t$. On remplace dans la deuxième :

$$6t = -1 - 2(3 - 2t) \iff 6t = -7 + 4t \iff 2t = -7 \iff t = -3,5,$$

d'où $k = 3 - 2 \times (-3,5) = 10$.

On vérifie la première équation : $3 + 4 \times (-3,5) = -11$ et $-2 + 3 \times 10 = 28$. Comme $-11 \neq 28$, le système n'a pas de solution : les droites n'ont **aucun point commun**.

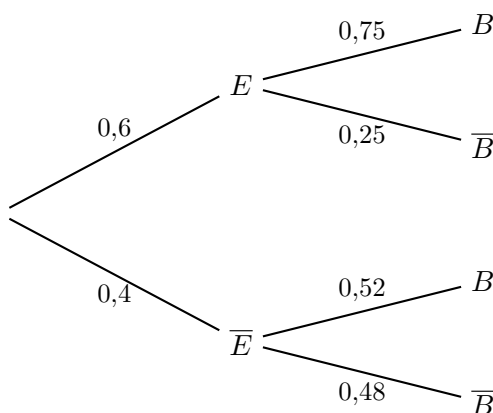
Non parallèles et sans point commun, les droites (d) et (d') sont **non coplanaires**.

Réponse **b**.

Exercice 2

10 points

D'après l'énoncé : $P(E) = 0,6$, $P(\bar{E}) = 0,4$, $P_E(B) = 0,75$ et $P_{\bar{E}}(B) = 0,52$.



1) On cherche $P(E \cap B)$:

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times 0,75 = \boxed{0,45}.$$

2) Les événements E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\bar{E} \cap B) = 0,45 + 0,4 \times 0,52 = 0,45 + 0,208 = \boxed{0,658}.$$

3) On cherche $P_B(E)$:

$$P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0,45}{0,658} \approx \boxed{0,684}.$$

4) a. On répète 20 fois, de manière identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec

remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « l'acheteur peut installer une borne » a pour probabilité $p = P(B) = 0,658$.

X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}(n = 20; p = 0,658).$$

b. $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times 0,342^{12} \approx \boxed{0,011}.$

c. On cherche $P(X \geq 10)$:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0,045 \approx \boxed{0,955}.$$

d. $E(X) = n \times p = 20 \times 0,658 = \boxed{13,16}.$

Sur un grand nombre d'échantillons de 20 acheteurs, il y a en moyenne 13,16 acheteurs pouvant installer une borne.

e. Le coût de l'offre est $C = 1\,200 X$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(C) = 1\,200 \times E(X) = 1\,200 \times 13,16 = 15\,792.$$

En moyenne, la directrice doit prévoir d'engager $\boxed{15\,792 \text{ €}}$ pour la vente de 20 véhicules.

Exercice 3

10 points

1) a. $f(x) = 0,06x(-x + 13,7)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,06x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 13,7) = -\infty$, donc par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

b. f est une fonction polynôme; pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 0,06(-2x + 13,7).$$

Comme $0,06 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x + 13,7$:

$$-2x + 13,7 > 0 \iff -2x > -13,7 \iff x < 6,85.$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; 6,85[$, $f'(6,85) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]6,85; +\infty[$:

f est croissante sur $[0; 6,85]$ et décroissante sur $[6,85; +\infty[$.

De plus $f(0) = 0$ et $f(6,85) = 0,06 \times 6,85 \times 6,85 = 2,81535$.

x	0	6,85	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	2,81535	$-\infty$

c. Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 0,06x(-x + 13,7) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } -x + 13,7 = 0 \quad (\text{produit nul}) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 13,7. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{0; 13,7\}$$

2) a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,15x + 2,2) = -\infty$ et, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,2x} = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$).

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} = -\infty$, puis par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

b. On pose $u(x) = -0,15x + 2,2$ et $v(x) = e^{0,2x}$, avec $u'(x) = -0,15$ et $v'(x) = 0,2e^{0,2x}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0 \\ &= -0,15e^{0,2x} + (-0,15x + 2,2) \times 0,2e^{0,2x} \\ &= (-0,15 - 0,03x + 0,44)e^{0,2x} \end{aligned}$$

donc $\boxed{g'(x) = (-0,03x + 0,29) e^{0,2x}}$.

c. Pour tout réel x , $e^{0,2x} > 0$: $g'(x)$ a le signe de $-0,03x + 0,29$.

$$-0,03x + 0,29 > 0 \iff -0,03x > -0,29 \iff x < \frac{0,29}{0,03} = \frac{29}{3} \approx 9,67.$$

Donc g est croissante sur $\left[0; \frac{29}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{29}{3}; +\infty\right]$.

$g(0) = 2,2 \times e^0 - 2,2 = 0$ et

$$g\left(\frac{29}{3}\right) = \left(-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2\right) e^{0,2 \times \frac{29}{3}} - 2,2 = 0,75 e^{\frac{29}{15}} - 2,2.$$

x	0	$\frac{29}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g	0	$0,75 e^{\frac{29}{15}} - 2,2$	$-\infty$

Le maximum de g est $g\left(\frac{29}{3}\right) = 0,75 e^{\frac{29}{15}} - 2,2 \approx \boxed{2,98}$.

d. Sur $\left]0; \frac{29}{3}\right]$: g est strictement croissante et $g(0) = 0$, donc pour tout x de cet intervalle

$g(x) > g(0) = 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution non nulle sur $\left]0; \frac{29}{3}\right]$.

Sur $\left[\frac{29}{3}; +\infty\right]$: g est continue (car dérivable) et strictement décroissante, $g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Comme $0 \in]-\infty; g\left(\frac{29}{3}\right)]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une **unique solution non nulle** α .

À la calculatrice : $g(13,72) \approx 0,008 > 0$ et $g(13,73) \approx -0,011 < 0$, donc $13,72 < \alpha < 13,73$ et $\boxed{\alpha \approx 13,72}$ (valeur approchée par défaut; $\alpha \approx 13,724$).

Exercice 4

12 points

Partie A

$$1) u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{2 + 3 \times 3}{4 + 3} = \frac{11}{7} \approx 1,571.$$

- 2) f est un quotient de fonctions dérivables sur $[0; 4]$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($4+x \geq 4$). Avec $u(x) = 2 + 3x$, $v(x) = 4 + x$:

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - 1 \times (2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}.$$

Pour tout $x \in [0; 4]$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0; 4]$.

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7} \approx 1,57$: on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Tous les nombres en jeu sont dans $[0; 4]$, où f est croissante :

$$\begin{aligned} &1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3 \\ \implies &f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3) \quad (f \text{ croissante sur } [0; 4]) \\ \iff &1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{7} \quad (\text{car } f(1) = \frac{5}{5} = 1 \text{ et } f(3) = \frac{11}{7}) \\ \implies &1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3 \quad (\text{car } \frac{11}{7} \leq 3) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

- 4) a. D'après la question 3, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante; et $u_n \geq 1$: elle est minorée par 1.

Toute suite décroissante et minorée converge : (u_n) est convergente.

- b. Pour tout n , $1 \leq u_n \leq 3$, donc par passage à la limite $1 \leq \ell \leq 3$: $\ell \in [0; 4]$.

La fonction f est continue sur $[0; 4]$ (car dérivable) et $u_n \rightarrow \ell$, donc $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+1} \rightarrow \ell$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$:

$$\ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell}.$$

- c. Pour $x \in [0; 4]$ (donc $4+x \neq 0$) :

$$\begin{aligned} x = \frac{2+3x}{4+x} &\iff x(4+x) = 2+3x \iff x^2 + x - 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x+2) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

Comme $\ell \geq 1$, on obtient $\ell = 1$.

Partie B

- 1) Les valeurs $0,1 < 0,5610 < 0,8075 < 0,9869 < 0,9999$ augmentent et se rapprochent de 1 : on conjecture que la suite (v_n) est croissante et converge vers 1.

Remarque. L'énoncé fait seulement conjecturer la croissance : elle n'est démontrée dans aucune question. On peut l'établir en une ligne à partir de la question 2.a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = (1 - v_n) - (1 - v_{n+1}) = (1 - v_n) \left(1 - \frac{2}{4 + v_n} \right) = \frac{(1 - v_n)(2 + v_n)}{4 + v_n} \geq 0,$$

car $1 - v_n \geq 0$ (question 2.b), et $2 + v_n > 0$, $4 + v_n > 0$ puisque $v_n \geq 0$ (question 2.b : $1 - v_n \leq (\frac{1}{2})^n \leq 1$). La suite (v_n) est donc bien croissante.

- 2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2 + 3v_n}{4 + v_n} = \frac{4 + v_n - 2 - 3v_n}{4 + v_n} = \frac{2 - 2v_n}{4 + v_n} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n).$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}(n)$: « $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $1 - v_0 = 0,9$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$: $0 \leq 0,9 \leq 1$. $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Alors $1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$, donc $v_n \geq 0$; et $1 - v_n \geq 0$, donc $v_n \leq 1$.

Ainsi $4 + v_n \geq 4$, d'où $0 < \frac{2}{4 + v_n} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{2}{4 + v_n} (1 - v_n) \leq \frac{2}{4 + v_n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{on multiplie par } \frac{2}{4 + v_n} > 0) \\ \Rightarrow 0 &\leq 1 - v_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{question 2.a et } \frac{2}{4 + v_n} \leq \frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 1 - v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- 3) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Pour tout n , $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

La suite (v_n) converge vers 1, ce qui confirme la conjecture de la question 1 sur la limite.