

Calculatrice autorisée en mode examen

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

8 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie **en justifiant soigneusement**. Une réponse fausse ou multiple, l'absence de réponse ou de justification à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère les points $A(1; 0; 3)$ et $B(4; 1; 0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

- a. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$
- avec $t \in \mathbb{R}$ dans chacune des propositions.

2) On considère le point $C(-2; 1; -4)$.

- a. Les points A, B et C sont alignés. b. Le point C est le milieu de $[AB]$. c. A, B et C définissent un plan. d. A, B et C ne sont pas coplanaires.

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3) Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

- a. $M(7; 6; 6)$ b. $N(3; 6; 4)$ c. $P(4; 6; -2)$ d. $R(-3; -9; 7)$

4) On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Les droites (d) et (d') sont :

- a. sécantes b. non coplanaires c. parallèles d. confondues

Exercice 2

10 points

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

- 1) Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
- 2) Démontrer que $P(B) = 0,658$.
- 3) Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
- 4) On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
 - a. Déterminer, en justifiant, la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Calculer $P(X = 8)$.
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
 - d. Calculer l'espérance de X .
 - e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 3

10 points

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

- 1) On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0	6,85	$+\infty$
f	0	$f(6,85)$	$-\infty$

- a. Justifier la limite de f en $+\infty$.
- b. Justifier les variations de la fonction f .
- c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

- 2) a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$, on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29) e^{0,2x}$.
c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0; +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g .
d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Exercice 4

12 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

- 1) Calculer u_1 .
- 2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
- 3) Montrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
- 4) a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Justifier que ℓ est solution de l'équation :

$$x = \frac{2+3x}{4+x}.$$

- c. Déterminer la valeur de la limite ℓ .

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

- 1) On donne la valeur approchée de certains termes de la suite (v_n) :

$$v_1 \approx 0,5610 ; \quad v_2 \approx 0,8075 ; \quad v_5 \approx 0,9869 ; \quad v_{10} \approx 0,9999.$$

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

- 2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n} \right) (1 - v_n)$.
b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$.
- 3) La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.