

Exercice 1

5 points

1) On utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$A = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = \boxed{9x^2 - 12x + 4}$$

$$B = \left(\frac{9}{7}x\right)^2 - 8^2 = \boxed{\frac{81}{49}x^2 - 64}$$

2) • $C = (2x)^2 - 3^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$$C = \boxed{(2x - 3)(2x + 3)}$$

• $D = 4x^2 - 10x + 25$: on a bien $4x^2 = (2x)^2$ et $25 = 5^2$, mais $2 \times 2x \times 5 = 20x \neq 10x$. D n'est donc ni de la forme $a^2 + 2ab + b^2$, ni de la forme $a^2 - 2ab + b^2$, ni de la forme $a^2 - b^2$:

D ne se factorise pas à l'aide des identités remarquables.

Remarque : on peut écrire $D = (2x - 5)^2 + 10x$; on verra avec le second degré que D ne se factorise pas du tout (discriminant $\Delta = 100 - 400 = -300 < 0$).

• $E = (8x)^2 - 2 \times 8x \times 5 + 5^2$ est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 8x$ et $b = 5$:

$$E = \boxed{(8x - 5)^2}$$

Vérification : $(8x - 5)^2 = 64x^2 - 80x + 25$.

Exercice 2

4 points

1)

$$u_0 = \frac{0}{0+1} = 0, \quad u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{u_0 = 0; u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3}}$$

2) On a $0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ (et $u_3 = \frac{3}{4} = 0,75 > \frac{2}{3}$) : la suite (u_n) semble croissante.

3) Pour tout entier naturel n , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Comme $n \geq 0$, on a $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est strictement croissante, ce qui démontre la conjecture.

Vérification avec $n = 0$: $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

3 points

1)

$$v_1 = 3 - 2v_0 = 3 - 2 \times 4 = -5, \quad v_2 = 3 - 2v_1 = 3 - 2 \times (-5) = 13.$$

$$v_1 = -5; v_2 = 13$$

2) La variable v contient d'abord $v_0 = 4$; chaque passage dans la boucle remplace v_n par $v_{n+1} = 3 - 2v_n$. Pour obtenir v_{20} , il faut donc 20 passages, ce que fait `range(20)` (k prend les valeurs $0, 1, \dots, 19$). On affiche ensuite la variable v (et non « v_{20} », qui n'est pas une variable du programme).

```

1 v = 4
2 for k in range(20):
3     v = 3 - 2*v
4 print(v)
```

Le programme affiche $v_{20} = 3\,145\,729$.

Exercice 4

4 points

1) Avec $n = 0$: $v_1 = v_0 + 2 \times 0 - 7 = 3 - 7 = -4$.

2) Avec $n = 1$ puis $n = 2$:

$$v_2 = v_1 + 2 \times 1 - 7 = -4 + 2 - 7 = -9, \quad v_3 = v_2 + 2 \times 2 - 7 = -9 + 4 - 7 = -12.$$

$$v_2 = -9; v_3 = -12$$

3) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = 2n - 7$. Or

$$2n - 7 > 0 \iff n > 3,5 \iff n \geq 4 \quad (n \text{ entier}).$$

- Pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$, $v_{n+1} - v_n < 0$: $v_0 > v_1 > v_2 > v_3 > v_4$.
- Pour $n \geq 4$, $v_{n+1} - v_n > 0$: $v_4 < v_5 < v_6 < \dots$

Avec $v_4 = v_3 + 2 \times 3 - 7 = -13$:

(v_n) est décroissante jusqu'au rang 4, puis croissante à partir du rang 4.

La suite (v_n) n'est donc pas monotone; son plus petit terme est $v_4 = -13$.

Vérification : $v_0, \dots, v_6 = 3; -4; -9; -12; -13; -12; -9$.

Exercice 5

4 points

- 1) Augmenter de 50 % revient à multiplier par $1 + \frac{50}{100} = 1,5$, puis on retire 30 g. Pour tout entier naturel n :

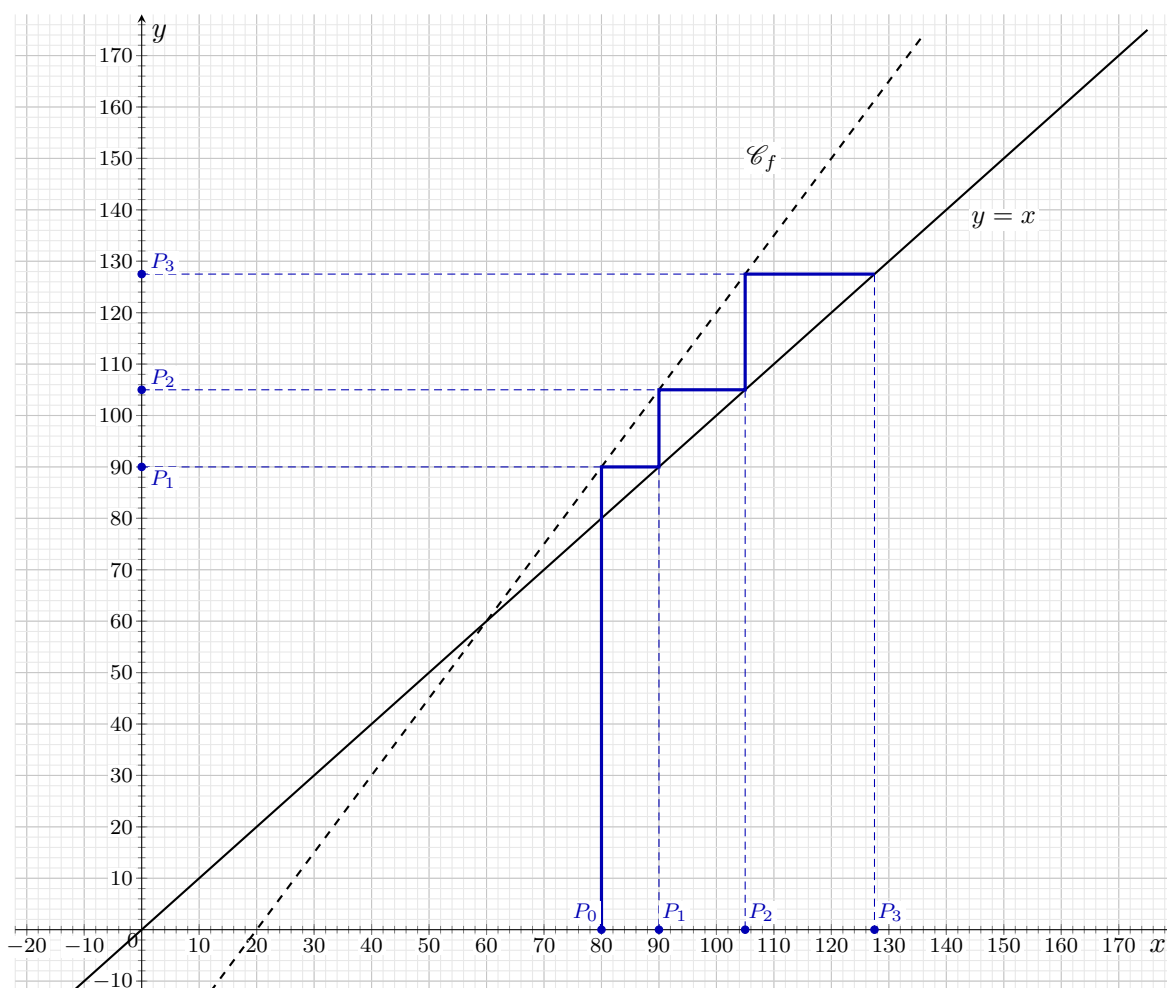
$$P_{n+1} = 1,5 P_n - 30.$$

$$P_1 = 1,5 \times 80 - 30 = 120 - 30 = 90, \quad P_2 = 1,5 \times 90 - 30 = 135 - 30 = 105.$$

$$P_1 = 90 ; P_2 = 105$$

Interprétation : une heure après le début de la phase, le réacteur contient 90 g de bactéries ; deux heures après, il en contient 105 g.

- 2) La fonction f est définie par $f(x) = 1,5x - 30$ (elle passe par (20 ; 0) et (60 ; 60), ce qu'on lit sur le graphique). On part de $P_0 = 80$ sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe de f : l'ordonnée obtenue est $P_1 = f(P_0)$. On rejoint horizontalement la droite $y = x$: le point atteint a pour abscisse P_1 , que l'on reporte sur l'axe des abscisses. On recommence à partir de P_1 , puis de P_2 ($P_3 = 1,5 \times 105 - 30 = 127,5$).



- 3) Sur la construction, les termes s'éloignent de plus en plus vite vers la droite : la suite (P_n) semble croissante et ses termes semblent dépasser n'importe quelle valeur. On peut supposer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$$

c'est-à-dire qu'à long terme la quantité de bactéries dans le réacteur augmente sans limite (l'extraction de 30 g par heure ne suffit pas à stabiliser la culture).

Pour aller plus loin : les deux droites se coupent au point d'abscisse 60, car $1,5x - 30 = x$ équivaut à $x = 60$. On a $P_{n+1} - 60 = 1,5(P_n - 60)$: l'écart à 60, égal à 20 au départ, est multiplié par 1,5 chaque heure. Comme $P_0 = 80 > 60$, les termes s'éloignent de 60 vers le haut ($P_3 = 127,5$, $P_4 = 161,25$, $P_5 = 211,875$). Si l'on avait démarré avec exactement 60 g, la masse serait restée constante.