

Exercice 1

6 points

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on factorise par 4^n :

$$u_n = 4^{n+1} - 4^n = 4 \times 4^n - 4^n = (4 - 1) \times 4^n = 3 \times 4^n.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3 \times 4^{n+1} = 4 \times (3 \times 4^n) = 4 u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de premier terme $u_0 = 3 \times 4^0 = 3$:

$$(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = 4.$$

Vérification : $u_0 = 4 - 1 = 3$, $u_1 = 16 - 4 = 12$, $u_2 = 64 - 16 = 48$; on multiplie bien par 4 à chaque fois.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on développe avec l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$u_n = (3n + 2)^2 - 9n^2 = 9n^2 + 12n + 4 - 9n^2 = 12n + 4.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (12(n + 1) + 4) - (12n + 4) = 12n + 16 - 12n - 4 = 12.$$

La différence entre deux termes consécutifs est constante (la suite a pour premier terme $u_0 = 4$) :

$$(u_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 12.$$

c. On calcule les premiers termes :

$$u_1 = u_0 + 3 \times 0 = 4, \quad u_2 = u_1 + 3 \times 1 = 7, \quad u_3 = u_2 + 3 \times 2 = 13.$$

- $u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 3$: ces différences ne sont pas égales, donc la suite n'est pas arithmétique.
- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{4} = 1$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4}$: ces quotients ne sont pas égaux, donc la suite n'est pas géométrique.

$$(u_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique.}$$

Remarque : $u_{n+1} - u_n = 3n$ dépend de n ; ce n'est donc pas une constante.

Exercice 2

7 points

1) On applique la relation de récurrence :

$$u_1 = \frac{u_0}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1 + u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1 + u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $u_{n+1} \neq 0$, donc v_n et v_{n+1} sont bien définis, et :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1 + u_n}} = \frac{1 + u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{u_n} = v_n + 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 1$: la suite (v_n) est arithmétique, de raison $\boxed{r = 1}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

Vérification : $v_1 = \frac{1}{u_1} = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$; on ajoute bien 1 à chaque fois.

3) (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 + n r = 1 + n \times 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{v_n = n + 1}.$$

Comme $v_n = \frac{1}{u_n}$, on a $u_n = \frac{1}{v_n}$ (et $v_n = n + 1 \neq 0$), d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n + 1}}.$$

Vérification : $u_0 = \frac{1}{1} = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{4}$, conformément à la question 1).

Exercice 3

7 points

Rappels.

- Pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geq 0$: $1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

1) **Somme A.** C'est la somme des entiers de 1 à 300 :

$$A = \sum_{k=1}^{300} k = \frac{300 \times 301}{2} = 150 \times 301 = \boxed{45\,150}.$$

Somme B. Les termes sont les puissances successives de $-\frac{1}{2}$, de l'exposant 1 à l'exposant 8 (car $2^8 = 256$) :

$$B = \sum_{k=1}^8 \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

C'est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $-\frac{1}{2}$:

$$B = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{255}{256} \times \frac{2}{3} = -\frac{255}{768} = \boxed{-\frac{85}{256}}.$$

Vérification : en réduisant tout au dénominateur 256,

$$B = \frac{-128 + 64 - 32 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1}{256} = \frac{-85}{256}.$$

Somme C. Ce sont les multiples de 5, de 5×1 à 5×400 (car $2000 = 5 \times 400$) :

$$C = \sum_{k=1}^{400} 5k = 5 \sum_{k=1}^{400} k = 5 \times \frac{400 \times 401}{2} = 5 \times 80\,200 = \boxed{401\,000}.$$

Autre méthode : C est la somme de 400 termes consécutifs d'une suite arithmétique, donc $C = 400 \times \frac{5 + 2000}{2} = 200 \times 2005 = 401\,000$.

2) On sépare la somme en trois (linéarité de $\sum$); l'indice i prend les 11 valeurs de 0 à 10 :

$$D = \sum_{i=0}^{10} (-3)^i + 2 \sum_{i=0}^{10} i - \sum_{i=0}^{10} 7.$$

- Somme géométrique de raison -3 , de 11 termes, de premier terme 1 ; comme 11 est impair, $(-3)^{11} = -3^{11} = -177\,147$:

$$\sum_{i=0}^{10} (-3)^i = \frac{1 - (-3)^{11}}{1 - (-3)} = \frac{1 + 177\,147}{4} = \frac{177\,148}{4} = 44\,287.$$

$$\bullet 2 \sum_{i=0}^{10} i = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110.$$

$$\bullet \sum_{i=0}^{10} 7 = 11 \times 7 = 77 \text{ (attention : 11 termes, et non 10).}$$

Finalement :

$$D = 44\,287 + 110 - 77 = \boxed{44\,320}.$$