

Exercice 1 : Vrai ou faux, et trois questions

5 points

Barème : question 1 : 1,5 pt (0,5 par affirmation justifiée); question 2 : 1,5 pt; question 3 : 1 pt; question 4 : 1 pt.

Question 1

- a. **VRAI.** F est de la forme $uv - x$ avec $u(x) = x, v(x) = \ln x : F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
- b. **FAUX.** Avec $u(x) = 3x + 1, u'(x) = 3$ et $(e^u)' = u'e^u$: la dérivée est $x \mapsto 3e^{3x+1}$, et non e^{3x+1} (par exemple en $x = 0$, elle vaut $3e \neq e$).
- c. **FAUX.** Pour $a > 0, \ln(a^n) = n \ln(a)$, donc $\ln(a^6) - \ln(a^2) = 6 \ln(a) - 2 \ln(a) = 4 \ln(a)$, qui dépend de a . Contre-exemple : pour $a = e, \ln(e^6) - \ln(e^2) = 6 - 2 = 4 \neq 3$. (Confusion fréquente : c'est le quotient $\frac{\ln(a^6)}{\ln(a^2)}$ qui vaut 3 pour $a > 0, a \neq 1$.)

Question 2

- a. $h(x) = 2xe^{-x} + e^{-x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

- b. $h = uv$ avec $u(x) = 2x + 1, u'(x) = 2, v(x) = e^{-x}, v'(x) = -e^{-x}$:

$$h'(x) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0, h'(x)$ a le signe de $1 - 2x$: positif sur $[0; \frac{1}{2}]$, négatif ensuite. $h(0) = 1$ et le maximum vaut $h(\frac{1}{2}) = 2e^{-1/2} (\approx 1,21)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
h	1	$2e^{-1/2}$	0

Question 3

(E_1) est du type $y' = ay + b$ avec $a = 0,5$ et $b = -3$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{0,5t} - \frac{b}{a} = Ke^{0,5t} + 6, K \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = 10$ donne $K + 6 = 10$, soit $K = 4$: $y(t) = 4e^{0,5t} + 6$.

Question 4

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur $[0; 3]$ est $x \mapsto \ln(x+1)$ (car $x+1 > 0$). Valeur moyenne :

$$\frac{1}{3-0} \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2 \ln 2}{3} \approx 0,46.$$

Exercice 2 : Un flacon de phosphore 32

8 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1 pt; 3) 1 pt; 4) 1 pt; 5) 1,5 pt; 6) 1,25 pt; 7) 1,25 pt.

- 1) (E) est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\lambda$: ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-\lambda t}$, $K \in \mathbb{R}$.
Comme A est solution de (E) et que $A(0) = 37$, on a $Ke^0 = K = 37$, d'où $A(t) = 37e^{-\lambda t}$.

- 2) $A(14) = 18,8 \iff 37e^{-14\lambda} = 18,8 \iff e^{-14\lambda} = \frac{18,8}{37} \iff -14\lambda = \ln\left(\frac{18,8}{37}\right) \iff \lambda = -\frac{1}{14} \ln\left(\frac{18,8}{37}\right) = \frac{1}{14} \ln\left(\frac{37}{18,8}\right)$.
On obtient $\lambda \approx 0,0484$, soit $\lambda \approx 0,048 \text{ j}^{-1}$.

- 3) a. $A(28) = 37e^{-0,048 \times 28} = 37e^{-1,344} \approx 9,6 \text{ MBq}$, contre 9,5 MBq mesurés : l'écart est de 0,1 MBq, de l'ordre de la précision des mesures. Le modèle est en bon accord avec l'expérience. (Avec $\lambda = 0,0484$, $A(28) \approx 9,5 \text{ MBq}$: accepté.)

- b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,048t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 0$.

Phrase attendue : à long terme, l'activité du flacon devient négligeable : presque tous les noyaux de phosphore 32 se sont désintégrés, et le flacon n'est plus radioactif de façon mesurable.

- 4) $A(t) = \frac{37}{2} \iff e^{-0,048t} = \frac{1}{2} \iff -0,048t = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,048}$. La demi-vie du modèle est $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,048} \approx 14,4 \text{ jours}$.

Phrase attendue : la valeur obtenue, 14,4 jours, est très proche de la valeur tabulée de 14,3 jours ; le petit écart vient de l'arrondi de λ à 10^{-3} et de l'incertitude des mesures (avec $\lambda = 0,0484$ on trouverait 14,3 jours). Les mesures du laboratoire sont donc cohérentes avec les tables.

- 5) $A(t) \geq 5 \iff 37e^{-0,048t} \geq 5 \iff e^{-0,048t} \geq \frac{5}{37} \iff -0,048t \geq \ln\left(\frac{5}{37}\right) \iff t \leq \frac{\ln(37/5)}{0,048}$
(division par $-0,048 < 0$). Or $\frac{\ln(7,4)}{0,048} \approx 41,7$: le flacon reste utilisable pendant 41 jours entiers (le 42^e jour, l'activité passe sous 5 MBq).

- 6) a. Une primitive de $t \mapsto e^{-0,048t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{0,048} e^{-0,048t}$, donc $F(t) = -\frac{37}{0,048} e^{-0,048t}$. (Vérification : $F'(t) = -\frac{37}{0,048} \times (-0,048) e^{-0,048t} = A(t)$.)

- b. $\int_0^{30} A(t) dt = F(30) - F(0) = \frac{37}{0,048} (1 - e^{-1,44}) \approx 588 \text{ MBq} \cdot \text{j}$.

$N = 86\,400 \times 10^6 \times 588,2 \approx 5,08 \times 10^{13}$, soit $N \approx 5,1 \times 10^{13}$ désintégrations en 30 jours.

- 7) $A(t) < \frac{37}{1\,000} \iff e^{-0,048t} < 10^{-3} \iff -0,048t < \ln(10^{-3}) = -3 \ln 10 \iff t > \frac{3 \ln 10}{0,048} \approx 143,9$. Le flacon peut sortir du stockage au bout de 144 jours.

Phrase attendue : au bout de dix demi-vies, l'activité a été divisée par $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$, donc elle est passée sous le millième de sa valeur initiale ; dix demi-vies de 14,4 jours font 144 jours,

le délai calculé.

Exercice 3 : Une culture de levures en bioréacteur

7 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1 pt; 3) 1 pt; 4) 1,5 pt; 5) 1 pt; 6) 1,5 pt.

- 1) D est solution de l'équation différentielle $y' = \mu y$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto K e^{\mu t}$, $K \in \mathbb{R}$. La condition initiale $D(0) = 0,10$ donne $K = 0,10$: $D(t) = 0,10 e^{\mu t}$.

- 2) $D(3) = 0,40 \iff 0,10 e^{3\mu} = 0,40 \iff e^{3\mu} = 4 \iff 3\mu = \ln 4 = 2 \ln 2 \iff \mu = \frac{2 \ln 2}{3}$.
Numériquement, $\mu \approx 0,46 \text{ h}^{-1}$.

- 3) On cherche G tel que $D(t + G) = 2D(t)$ pour tout t , c'est-à-dire $0,10 e^{\mu t} e^{\mu G} = 2 \times 0,10 e^{\mu t}$, soit $e^{\mu G} = 2$, donc $\mu G = \ln 2$ et $G = \frac{\ln 2}{\mu}$. Avec $\mu = \frac{2 \ln 2}{3}$: $G = \ln 2 \times \frac{3}{2 \ln 2} = \frac{3}{2} \text{ h}$, soit $G = 90 \text{ minutes}$: la population de levures double toutes les 90 minutes.

- 4) $D(t) = 3,2 \iff e^{\mu t} = 32 \iff \mu t = \ln 32 = 5 \ln 2 \iff t = \frac{5 \ln 2}{\mu} = 5 \ln 2 \times \frac{3}{2 \ln 2} = \frac{15}{2}$. La phase exponentielle dure exactement 7,5 heures (soit cinq temps de génération : $0,10 \times 2^5 = 3,2$).

- 5) $\ln(D(t)) = \ln(0,10 e^{\mu t}) = \ln(0,10) + \ln(e^{\mu t}) = \mu t + \ln(0,10)$. La fonction $t \mapsto \ln(D(t))$ est affine : sa courbe est une droite, de coefficient directeur μ et d'ordonnée à l'origine $\ln(0,10) \approx -2,30$.

Phrase attendue : en reportant $\ln(D)$ en fonction du temps, le technicien doit obtenir des points alignés tant que la culture est en phase exponentielle; la pente de la droite qui les ajuste est le taux de croissance μ (ici, $\ln D$ augmente de $2 \ln 2 \approx 1,39$ toutes les 3 heures).

- 6) a. $H'(t) = \frac{0,10}{\mu} \times \mu e^{\mu t} = 0,10 e^{\mu t} = D(t)$: H est une primitive de D .

b. Valeur moyenne sur $[0; 7,5]$:

$$\frac{1}{7,5} \int_0^{7,5} D(t) dt = \frac{1}{7,5} (H(7,5) - H(0)) = \frac{0,10}{7,5 \mu} (e^{7,5\mu} - 1) = \frac{0,10 \times 31}{7,5 \mu} \approx 0,89 \approx 0,9,$$

car $e^{7,5\mu} = 32$ d'après la question 4. Selon la valeur de μ utilisée (exacte $\frac{2 \ln 2}{3}$ ou arrondie 0,46) et les arrondis intermédiaires, on obtient 0,88, 0,89 ou 0,90 : toute valeur de 0,88 à 0,90 est acceptée si l'élève donne un arrondi plus fin que 10^{-1} .

Phrase attendue : la densité optique moyenne, environ 0,9, est très inférieure à la valeur finale 3,2, et même à la moitié de celle-ci : une croissance exponentielle reste longtemps faible et ne « décolle » qu'à la fin. La culture ne dépasse sa valeur moyenne qu'au bout d'environ 4,7 heures, soit après plus de la moitié de la phase.