



*Calculatrice autorisée (mode examen)*

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement, noté sur 20 points de mathématiques. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 dans l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie. À l'épreuve, la qualité de la rédaction compte pour 2 points sur 20 : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.

## Exercice 1 : Vrai ou faux, et trois questions

5 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

### Question 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, **en justifiant la réponse**.

- a. La fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b. La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto e^{3x+1}$  a pour dérivée  $x \mapsto e^{3x+1}$ .
- c. Pour tout réel  $a > 0$ ,  $\ln(a^6) - \ln(a^2) = 3$ .

### Question 2

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (2x + 1)e^{-x}$ . On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ .

- a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .
- b. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ , puis dresser le tableau de variations de  $h$  sur  $[0; +\infty[$  (on y fera figurer la valeur exacte du maximum).

### Question 3

On considère l'équation différentielle  $(E_1)$  :  $y' = 0,5y - 3$ , où  $y$  est une fonction de la variable  $t$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer la solution de  $(E_1)$  qui vérifie  $y(0) = 10$ .

### Question 4

Calculer la valeur moyenne de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ . On donnera la valeur exacte, puis une valeur arrondie à  $10^{-2}$ .

## Exercice 2 : Un flacon de phosphore 32

8 points

Dans cet exercice, les mathématiques et la physique-chimie se complètent : la loi de décroissance radioactive fournit l'équation différentielle, les mesures du laboratoire permettent d'en déterminer la constante, et le modèle sert ensuite à gérer le flacon.

Un laboratoire de biologie moléculaire utilise le phosphore 32, isotope radioactif du phosphore, pour marquer des fragments d'ADN. Il reçoit un flacon dont l'activité, mesurée à réception (instant  $t = 0$ ), vaut 37,0 MBq (mégabecquerels; 1 MBq =  $10^6$  désintégrations par seconde). L'activité est ensuite mesurée chaque semaine :

| $t$ (jours)    | 0    | 7    | 14   | 21   | 28  |
|----------------|------|------|------|------|-----|
| Activité (MBq) | 37,0 | 26,4 | 18,8 | 13,4 | 9,5 |

On note  $A(t)$  l'activité du flacon, en MBq, à l'instant  $t$  exprimé en jours. La loi de décroissance radioactive indique que  $A$  est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -\lambda y,$$

où  $\lambda$  est une constante strictement positive, appelée constante radioactive, exprimée en  $j^{-1}$ .

- Déterminer, en fonction de  $\lambda$ , l'ensemble des solutions de  $(E)$ , puis en déduire que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $A(t) = 37e^{-\lambda t}$ .
- À l'aide de la mesure effectuée au bout de 14 jours, déterminer la valeur de  $\lambda$ , arrondie à  $10^{-3}$ .  
Pour toute la suite, on prendra  $\lambda = 0,048 j^{-1}$ .
- Calculer  $A(28)$  à l'aide du modèle, arrondi à  $10^{-1}$ , et comparer à la mesure.
  - Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$  et interpréter ce résultat par une phrase.
- La *demi-vie* du phosphore 32 est la durée au bout de laquelle l'activité est divisée par deux. Déterminer sa valeur exacte à partir du modèle, puis une valeur arrondie à  $10^{-1}$ . Les tables donnent 14,3 jours : commenter, par une phrase.
- Le flacon est utilisable pour le marquage tant que son activité reste supérieure ou égale à 5 MBq. Déterminer, par le calcul, pendant combien de jours entiers le flacon reste utilisable.
- Déterminer une primitive  $F$  de  $A$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - Un jour compte 86 400 secondes. Le nombre de désintégrations qui se produisent dans le flacon pendant les 30 premiers jours est donc

$$N = 86\,400 \times 10^6 \times \int_0^{30} A(t) dt.$$

Calculer  $\int_0^{30} A(t) dt$ , arrondie à l'unité, puis donner  $N$  en écriture scientifique avec deux chiffres significatifs.

- Une fois le flacon épuisé, il est stocké comme déchet radioactif jusqu'à ce que son activité devienne inférieure au millièème de l'activité initiale. Déterminer, par le calcul, ce délai en jours entiers, puis expliquer, par une phrase, pourquoi les laboratoires retiennent la règle pratique « dix demi-vies ».



### Exercice 3 : Une culture de levures en bioréacteur

7 points

Dans un bioréacteur, on cultive la levure *Saccharomyces cerevisiae*. La quantité de levures est suivie par la *densité optique* (DO) du milieu, mesurée au spectrophotomètre, qui est proportionnelle au nombre de cellules. On note  $D(t)$  la densité optique à l'instant  $t$  exprimé en heures. À la mise en culture,  $D(0) = 0,10$ , et l'on mesure  $D(3) = 0,40$ .

Pendant la *phase exponentielle* de la culture, la vitesse de croissance  $D'(t)$  est proportionnelle à la quantité de levures présentes : il existe un réel  $\mu > 0$ , appelé taux de croissance, tel que, pour tout  $t$  de cette phase,  $D'(t) = \mu D(t)$ .

- 1) Justifier que, pendant la phase exponentielle,  $D(t) = 0,10 e^{\mu t}$ .
- 2) À l'aide de la mesure  $D(3) = 0,40$ , montrer que  $\mu = \frac{2 \ln 2}{3}$ , puis donner une valeur de  $\mu$  arrondie à  $10^{-2}$  (en  $\text{h}^{-1}$ ).
- 3) Le *temps de génération*  $G$  est la durée au bout de laquelle la densité optique est multipliée par deux. Montrer que  $G = \frac{\ln 2}{\mu}$ , puis calculer  $G$  en minutes.
- 4) La phase exponentielle se termine lorsque le milieu s'appauvrit, ce qui se produit lorsque la densité optique atteint 3,2. Montrer que la phase exponentielle dure exactement 7,5 heures.
- 5) Montrer que, pendant la phase exponentielle,  $\ln(D(t)) = \mu t + \ln(0,10)$ . En déduire la nature de la courbe représentative de  $t \mapsto \ln(D(t))$  et expliquer, par une phrase, comment un technicien peut retrouver  $\mu$  sur cette courbe.
- 6)
  - a. Vérifier que la fonction  $H$  définie par  $H(t) = \frac{0,10}{\mu} e^{\mu t}$  est une primitive de  $D$ .
  - b. En déduire la valeur moyenne de la densité optique pendant la phase exponentielle, arrondie à  $10^{-1}$ . Comparer cette valeur à la densité optique finale 3,2 et expliquer l'écart par une phrase.