

Exercice 1 : Lire, calculer, intégrer

5 points

Barème : question 1 : 1,25 pt; question 2 : 1,25 pt; question 3 : 1,25 pt; question 4 : 1,25 pt.

Question 1

a. La courbe passe par le point de coordonnées $(0; 1)$: $f(0) = 1$. L'horizontale $y = 3$ coupe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse environ 2,2 : la solution de $f(x) = 3$ est $x \approx 2,2$ (toute lecture entre 2 et 2,4 est acceptée).

b. $f(x) = 3 \iff 4 - 3e^{-0,5x} = 3 \iff e^{-0,5x} = \frac{1}{3} \iff -0,5x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 \iff x = 2 \ln 3$.

La solution est $x = 2 \ln 3 \approx 2,20$, en accord avec la lecture graphique.

Question 2

a. $e^5 \times e^{-2} = e^{5-2} = e^3$, donc $\ln(e^5 \times e^{-2}) = \ln(e^3) = 3$.

$$\ln(8) - \ln(2) = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2).$$

b. $e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{2}$ (on applique le logarithme, et $\ln(e^{2x}) = 2x$).

$$x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0,80.$$

Question 3

a. $g(0) = \ln(1) = 0$. Avec $w(x) = 3x + 1 > 0$ sur $[0; +\infty[$ et $w'(x) = 3$, la formule $(\ln w)' = \frac{w'}{w}$ donne $g'(x) = \frac{3}{3x+1}$.

b. $g(x) = 2 \iff \ln(3x+1) = 2 \iff 3x+1 = e^2 \iff x = \frac{e^2-1}{3}$. Cette valeur est positive ($e^2 > 1$) : $x = \frac{e^2-1}{3} (\approx 2,13)$.

Question 4

a. Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$ et une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$: $U(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^2}{2}$. (Vérification : $U'(x) = e^{2x} + x = u(x)$.)

$$b. \int_0^1 u(x) dx = U(1) - U(0) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} \approx 3,69.$$

Exercice 2 : L'hydrolyse de l'aspirine en solution

8 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1 pt; 3) 1 pt; 4) 1,25 pt; 5) 1,25 pt; 6) 1 pt; 7) 1,5 pt.

1) $\ln(7,0) \approx \boxed{1,95}$ et $\ln(5,0) \approx \boxed{1,61}$.

2) a. $\ln(C(t)) = \ln(C_0 e^{-kt}) = \ln(C_0) + \ln(e^{-kt}) = \boxed{-kt + \ln(C_0)}$, d'après $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^X) = X$.

b. *Phrase attendue* : si le modèle est juste, $\ln(C)$ est une fonction affine de t , et les points $(t; \ln C)$ doivent être alignés sur une droite de coefficient directeur $-k$ et d'ordonnée à l'origine $\ln(C_0)$. C'est bien ce que l'on observe : les six points sont presque alignés, très proches de la droite $\mathcal{D}$, ce qui conforte l'hypothèse d'une décroissance exponentielle.

3) Par identification avec $y = -0,035t + 2,30$: $-k = -0,035$, donc $\boxed{k = 0,035 \text{ h}^{-1}}$; et $\ln(C_0) = 2,30$, donc $C_0 = e^{2,30} \approx 9,97$, soit $\boxed{C_0 \approx 10 \text{ mmol/L}}$, ce qui correspond bien à la concentration préparée.

4) On dérive la fonction composée $t \mapsto e^{-0,035t}$:

$$C'(t) = 10 \times (-0,035) e^{-0,035t} = -0,035 \times 10 e^{-0,035t} = -0,035 C(t),$$

donc $\boxed{C \text{ est solution de } y' = -0,035 y}$. Comme $e^{-0,035t} > 0$, on a $C'(t) < 0$ pour tout t .

Phrase attendue : la concentration en aspirine diminue sans cesse : la solution perd de l'aspirine au fil du temps, et d'autant plus vite qu'elle en contient encore beaucoup (la vitesse de disparition est proportionnelle à la concentration).

5) a. $C(t) = 5 \iff e^{-0,035t} = \frac{1}{2} \iff -0,035t = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,035}$.

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,035} \approx 19,8 \text{ h}}.$$

b. Après un temps de demi-vie, il reste la moitié; après un second, la moitié de la moitié. Par le calcul : $C(2t_{1/2}) = 10 e^{-2\ln 2} = 10 \times (e^{-\ln 2})^2 = 10 \times \frac{1}{4}$. Il reste $\boxed{25\%}$ de l'aspirine initiale.

6) $\frac{C(48)}{C_0} = e^{-0,035 \times 48} = e^{-1,68} \approx 0,186$: il reste environ $\boxed{19\%}$ de l'aspirine au bout de 48 h.

7) $C(t) < 1 \iff 10 e^{-0,035t} < 1 \iff e^{-0,035t} < 0,1 \iff -0,035t < \ln(0,1) \iff t > \frac{\ln(0,1)}{-0,035} = \frac{\ln 10}{0,035}$ (division par $-0,035 < 0$, qui change le sens de l'inégalité). Or $\frac{\ln 10}{0,035} \approx 65,8$: la solution devient inutilisable au bout de $\boxed{66 \text{ heures}}$, soit un peu moins de trois jours.

Exercice 3 : La chute d'une bille dans une huile

7 points

Barème : 1) 0,75 pt; 2) 1,25 pt; 3) 1 pt; 4) 1 pt; 5) 1,5 pt; 6) 1,5 pt.

- 1) $\frac{970}{7800} \approx 0,1244$, donc $9,8 \times (1 - 0,1244) \approx 8,58 \approx \boxed{8,6}$ à 10^{-1} près (la poussée d'Archimède compense environ 12 % du poids). La relation $v'(t) = 8,6 - 20v(t)$ s'écrit $v'(t) = -20v(t) + 8,6$: v est solution de (E).

- 2) a. (E) est du type $y' = ay + b$ avec $a = -20$ et $b = 8,6$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-20t} - \frac{b}{a}$, et $-\frac{8,6}{-20} = 0,43$: $y(t) = Ke^{-20t} + 0,43$, $K \in \mathbb{R}$.

- b. $v(0) = 0 \iff K + 0,43 = 0 \iff K = -0,43$. Donc $v(t) = -0,43e^{-20t} + 0,43 = \boxed{0,43(1 - e^{-20t})}$.

- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-20t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0,43 \text{ m/s}$. C'est la **vitesse limite** de la bille.

Phrase attendue : après une phase d'accélération (régime transitoire), la vitesse de la bille se stabilise à 0,43 m/s : le frottement de l'huile compense alors exactement le poids diminué de la poussée d'Archimède, et la bille descend à vitesse constante (régime permanent). C'est cette vitesse que le viscosimètre mesure.

- 4) $v = 0,43 - 0,43e^u$ avec $u(t) = -20t$, $u'(t) = -20$: $v'(t) = -0,43 \times (-20)e^{-20t} = \boxed{8,6e^{-20t}}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$: v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Phrase attendue : $v'(0) = 8,6 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de la bille à l'instant du lâcher; c'est l'accélération initiale due au poids diminué de la poussée d'Archimède, car la bille étant immobile, le frottement (proportionnel à la vitesse) est nul au départ.

- 5) a. $\frac{v(\tau)}{0,43} = 1 - e^{-20 \times \frac{1}{20}} = 1 - e^{-1} \approx \boxed{0,63}$: au bout du temps caractéristique $\tau = 0,05 \text{ s}$, la bille a atteint 63 % de sa vitesse limite.

- b. $v(t) \geq 0,95 \times 0,43 \iff 1 - e^{-20t} \geq 0,95 \iff e^{-20t} \leq 0,05 \iff -20t \leq \ln(0,05) \iff t \geq \frac{\ln(0,05)}{-20} = \frac{\ln 20}{20}$. La vitesse limite est atteinte à partir de $t = \frac{\ln 20}{20} \approx 0,150 \text{ s}$ (soit 3τ).

- 6) a. $V'(t) = 0,43 \left(1 + \frac{1}{20} \times (-20)e^{-20t} \right) = 0,43(1 - e^{-20t}) = v(t)$: V est une primitive de v .

- b. $d = V(0,5) - V(0) = 0,43 \left(0,5 + \frac{e^{-10}}{20} \right) - 0,43 \times \frac{1}{20} = 0,43 \left(0,45 + \frac{e^{-10}}{20} \right) \approx 0,1935 \text{ m}$, soit $\boxed{d \approx 19 \text{ cm}}$.

Phrase attendue : en une demi-seconde, la bille a parcouru environ 19 cm, ce qui est inférieur aux 25 cm de l'éprouvette : elle n'a pas encore atteint le fond. (Si elle était allée à la vitesse limite pendant toute la demi-seconde, elle aurait parcouru $0,43 \times 0,5 = 21,5 \text{ cm}$; le démarrage lui a fait perdre environ 2 cm.)