



Calculatrice autorisée (mode examen)

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement, noté sur 20 points de mathématiques. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 dans l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie. À l'épreuve, la qualité de la rédaction compte pour 2 points sur 20 : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.

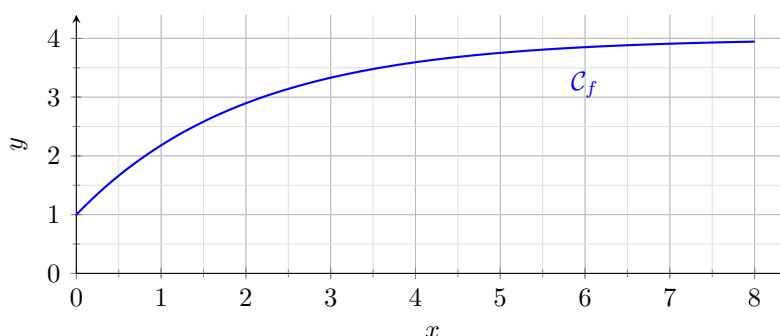
Exercice 1 : Lire, calculer, intégrer

5 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 8]$ par $f(x) = 4 - 3e^{-0,5x}$, dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



- Par lecture graphique, donner $f(0)$, puis une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 3$.
- Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 3$; on donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur arrondie à 10^{-2} .

Question 2

- Justifier que $\ln(e^5 \times e^{-2}) = 3$ et que $\ln(8) - \ln(2) = 2 \ln(2)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 5$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur arrondie à 10^{-2} .

Question 3

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(3x + 1)$.

- Calculer $g(0)$, puis montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{3}{3x+1}$.
- Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 2$. On donnera la valeur exacte de la solution.

Question 4

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{2x} + x$.

a. Déterminer une primitive U de u sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que $\int_0^1 u(x) dx = \frac{e^2}{2}$, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2} .

Exercice 2 : L'hydrolyse de l'aspirine en solution

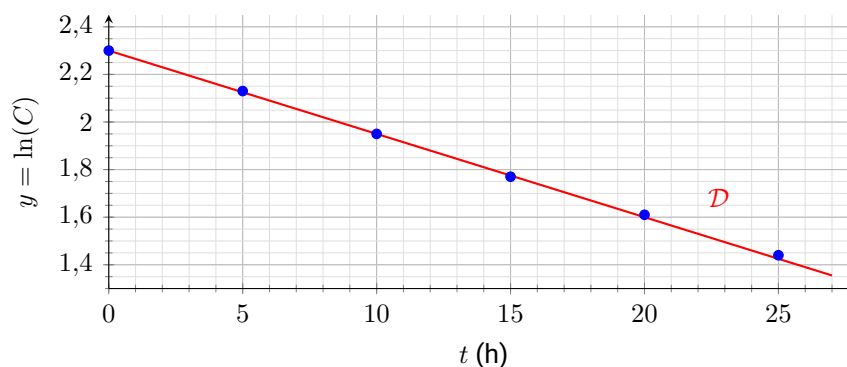
8 points

Dans cet exercice, les mathématiques et la physique-chimie se complètent : des mesures de laboratoire sont linéarisées grâce au logarithme, et la droite obtenue fournit les paramètres du modèle.

L'aspirine (acide acétylsalicylique) se dégrade lentement en solution aqueuse par hydrolyse. Dans un laboratoire pharmaceutique, on prépare une solution d'aspirine de concentration 10,0 mmol/L, maintenue à 40 °C dans un bain thermostaté, et l'on dose régulièrement la concentration C en aspirine restante, exprimée en mmol/L, en fonction du temps t exprimé en heures.

t (h)	0	5	10	15	20	25
C (mmol/L)	10,0	8,4	7,0	5,9	5,0	4,2
$y = \ln(C)$	2,30	2,13	...	1,77	...	1,44

Le nuage des points $(t; \ln C)$ est représenté ci-dessous, avec sa droite d'ajustement $\mathcal{D}$, obtenue à la calculatrice par la méthode des moindres carrés : $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -0,035t + 2,30$ (coefficients arrondis).



- 1) Calculer les deux valeurs manquantes du tableau, arrondies à 10^{-2} .
- 2) On fait l'hypothèse que la concentration suit une loi du type $C(t) = C_0 e^{-kt}$, où C_0 et k sont des réels strictement positifs.
 - a. Montrer que, sous cette hypothèse, $\ln(C(t)) = -kt + \ln(C_0)$.
 - b. Expliquer, par une phrase, en quoi le nuage de points obtenu est cohérent avec cette hypothèse.
- 3) À l'aide de l'équation de la droite $\mathcal{D}$, déterminer une valeur de k (en h^{-1}), puis une valeur de C_0 arrondie à l'unité. Pour la suite, on prendra $k = 0,035 \text{ h}^{-1}$ et $C_0 = 10 \text{ mmol/L}$, de sorte que, pour tout $t \geq 0$, $C(t) = 10 e^{-0,035t}$.
- 4) Vérifier que C est solution de l'équation différentielle $y' = -0,035y$, et préciser le signe de $C'(t)$. Que traduit ce signe pour la solution d'aspirine ?



- 5) a. Le *temps de demi-vie* de l'aspirine en solution est le temps au bout duquel la concentration initiale est divisée par deux. Déterminer sa valeur exacte, puis une valeur arrondie à 10^{-1} .
b. Quelle proportion de l'aspirine initiale reste-t-il au bout de deux temps de demi-vie ? Justifier.
- 6) Calculer la proportion, en pourcentage arrondi à l'unité, d'aspirine restante au bout de 48 heures.
- 7) La solution est considérée comme inutilisable lorsque la concentration en aspirine devient inférieure à 1,0 mmol/L. Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures entières la solution devient inutilisable.

Exercice 3 : La chute d'une bille dans une huile

7 points

Pour mesurer la viscosité d'une huile de silicone, on lâche sans vitesse initiale une petite bille d'acier (masse volumique $7\,800\text{ kg/m}^3$) à la surface d'une éprouvette remplie de cette huile (masse volumique 970 kg/m^3), haute de 25 cm. On note $v(t)$ la vitesse de la bille, en m/s, à l'instant t exprimé en secondes ; ainsi $v(0) = 0$.

L'étude mécanique (poids, poussée d'Archimède, frottement visqueux proportionnel à la vitesse) conduit, pour tout $t \geq 0$, à la relation $v'(t) = 8,6 - 20v(t)$, où $8,6\text{ m/s}^2$ est l'intensité de la pesanteur $g = 9,8\text{ m/s}^2$ diminuée par l'effet de la poussée d'Archimède.

- 1) Vérifier que $9,8 \times \left(1 - \frac{970}{7\,800}\right) \approx 8,6$ (arrondi à 10^{-1}), puis justifier que v est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -20y + 8,6$, où y est une fonction de t définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
- 2) a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
b. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $v(t) = 0,43(1 - e^{-20t})$.
- 3) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Comment appelle-t-on cette valeur en physique ? Interpréter ce résultat pour le mouvement de la bille, par une phrase.
- 4) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $v'(t) = 8,6 e^{-20t}$. En déduire le sens de variation de v , puis interpréter la valeur de $v'(0)$ par une phrase.
- 5) a. On appelle *temps caractéristique* le nombre $\tau = \frac{1}{20}$ s. Calculer le rapport $\frac{v(\tau)}{0,43}$, arrondi à 10^{-2} , et l'exprimer en pourcentage.
b. On considère que la vitesse limite est atteinte lorsque $v(t) \geq 0,95 \times 0,43$. Déterminer, par le calcul, l'instant à partir duquel la vitesse limite est atteinte ; on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} s.
- 6) a. Vérifier que la fonction V définie sur $[0; +\infty[$ par $V(t) = 0,43 \left(t + \frac{1}{20} e^{-20t}\right)$ est une primitive de v .
b. La distance parcourue par la bille entre les instants 0 et 0,5 s est $d = \int_0^{0,5} v(t) dt$. Calculer d , arrondie au centimètre. La bille a-t-elle atteint le fond de l'éprouvette à l'instant $t = 0,5$ s ? Justifier par une phrase.