

Exercice 1 : Quatre questions de laboratoire

5 points

Barème : question 1 : 1,25 pt; question 2 : 1,25 pt; question 3 : 1 pt; question 4 : 1,5 pt.

Question 1

- a. $f(0) = 2 + 3 \ln(1) = 2 + 0 = 2$. Et $f(e - 1) = 2 + 3 \ln(e - 1 + 1) = 2 + 3 \ln(e) = 2 + 3 \times 1 = 5$.
- b. $f(x) = 8 \iff 3 \ln(x + 1) = 6 \iff \ln(x + 1) = 2 \iff x + 1 = e^2 \iff x = e^2 - 1$ (on applique l'exponentielle, qui est strictement croissante, et $e^{\ln(x+1)} = x + 1$). Comme $e^2 - 1 > 0$, la solution appartient bien à $[0; +\infty[$: $x = e^2 - 1 \approx 6,39$.

Question 2

- a. $g = 4e^u$ avec $u(t) = -0,5t$ et $u'(t) = -0,5$. Comme $(e^u)' = u'e^u$: $g'(t) = 4 \times (-0,5) e^{-0,5t} = -2e^{-0,5t}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $g'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$: g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

Question 3

- a. (E_1) est de la forme $y' = ay$ avec $a = 3$: ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{3t}$, où K est un réel quelconque.
- b. $y(0) = 2 \iff Ke^0 = 2 \iff K = 2$. La solution cherchée est $y(t) = 2e^{3t}$.

Question 4

- a. Sur $[1; 4]$, $x > 0$ et $H'(x) = 2x + \frac{1}{x} = h(x)$: H est une primitive de h .
- b. $\int_1^4 h(x) dx = H(4) - H(1) = (16 + \ln 4) - (1 + \ln 1) = 15 + \ln 4$ (on peut aussi écrire $15 + 2 \ln 2$, soit $\approx 16,39$).
- Valeur moyenne : $\frac{1}{4-1} \int_1^4 h(x) dx = \frac{15 + \ln 4}{3} \approx 5,46$.

Exercice 2 : L'hydrolyse du saccharose

8 points

Barème : 1) 0,5 pt; 2) 1,25 pt; 3) 1,25 pt; 4) 1 pt; 5) 1,25 pt; 6) 1,25 pt; 7) 1,5 pt.

- $\frac{C_0}{2} = 0,15$ mol/L. On trace l'horizontale $C = 0,15$: elle coupe la courbe en un point d'abscisse comprise entre 50 et 60 min. On lit $t_{1/2} \approx 58$ à 60 min (toute lecture entre 50 et 65 min est acceptée).
- Par définition $v(t) = -C'(t)$, et la loi d'ordre 1 donne $v(t) = 0,012 C(t)$. Donc $-C'(t) = 0,012 C(t)$, c'est-à-dire $C'(t) = -0,012 C(t)$: C est solution de (E) .
- C est solution de (E) , donc il existe un réel K tel que $C(t) = Ke^{-0,012t}$. La condition initiale donne $C(0) = Ke^0 = K = 0,30$. Ainsi $C(t) = 0,30 e^{-0,012t}$.

4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,012t) = -\infty$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,012t} = 0$ et $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0}$.

Phrase attendue : à long terme, la concentration en saccharose tend vers zéro : la réaction est totale, tout le saccharose finit par être hydrolysé, même si le modèle ne lui fait jamais atteindre exactement la valeur 0.

5) a. $C(t) = \frac{C_0}{2} \iff 0,30 e^{-0,012t} = 0,15 \iff e^{-0,012t} = \frac{1}{2} \iff -0,012t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,012}$.

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,012} \approx 57,8 \text{ min.}}$$

b. *Phrase attendue* : le modèle donne un temps de demi-réaction d'environ 58 min, en accord avec la lecture graphique (environ 60 min, à la précision du graphique près) : le modèle d'ordre 1 décrit bien la courbe expérimentale.

6) Il reste alors 10 % du saccharose : $C(t) = 0,1 \times 0,30 = 0,03 \text{ mol/L}$. $0,30 e^{-0,012t} \leq 0,03 \iff e^{-0,012t} \leq 0,1 \iff -0,012t \leq \ln(0,1) \iff t \geq \frac{\ln(0,1)}{-0,012} = \frac{\ln 10}{0,012}$ (on divise par $-0,012 < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité). Or $\frac{\ln 10}{0,012} \approx 191,9$: la réaction est terminée au bout de $\boxed{192 \text{ minutes}}$, soit environ 3 h 12 min.

7) a. $F'(t) = -25 \times (-0,012) e^{-0,012t} = 0,30 e^{-0,012t} = C(t)$: $\boxed{F \text{ est une primitive de } C}$.

b. Valeur moyenne sur $[0 ; 60]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{60} \int_0^{60} C(t) dt &= \frac{1}{60} (F(60) - F(0)) = \frac{1}{60} (-25 e^{-0,72} + 25) \\ &= \frac{25}{60} (1 - e^{-0,72}) \approx \boxed{0,214 \text{ mol/L}}. \end{aligned}$$

Phrase attendue : pendant la première heure, la solution contient en moyenne 0,214 mol/L de saccharose : c'est la concentration constante qui donnerait la même « quantité cumulée » sur l'heure. Elle est plus proche de $C_0 = 0,30$ que de $C(60) \approx 0,146$, car la concentration décroît vite au début puis de plus en plus lentement.

Exercice 3 : La mise en température d'une étuve

7 points

Barème : 1) 1,25 pt; 2) 1 pt; 3) 1 pt; 4) 1,5 pt; 5) 1 pt; 6) 1,25 pt.

- 1) a. (E') est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0,15$ et $b = 5,55$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,15t} - \frac{b}{a}$, et $-\frac{5,55}{-0,15} = 37$: $y(t) = Ke^{-0,15t} + 37$, $K \in \mathbb{R}$.

b. $T(0) = 20 \iff K + 37 = 20 \iff K = -17$. Donc $T(t) = 37 - 17e^{-0,15t}$.

- 2) a. $T'(t) = -17 \times (-0,15)e^{-0,15t} = 2,55e^{-0,15t}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $T'(t) > 0$: T est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b. $T(10) = 37 - 17e^{-1,5} \approx 33,2 \text{ } ^\circ\text{C}$.

- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,15t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 37$.

Phrase attendue : la température de l'étuve se stabilise à $37 \text{ } ^\circ\text{C}$, la température de consigne, sans jamais la dépasser : pour tout t , $T(t) - 37 = -17e^{-0,15t} < 0$, donc $T(t) < 37$. L'écart à la consigne diminue sans cesse mais ne s'annule jamais (régime transitoire, puis régime permanent).

- 4) $T(t) = 36 \iff 17e^{-0,15t} = 1 \iff e^{-0,15t} = \frac{1}{17} \iff -0,15t = -\ln 17 \iff t = \frac{\ln 17}{0,15}$. Valeur exacte $t = \frac{\ln 17}{0,15} \approx 18,9$. Comme T est croissante, $T(t) \geq 36$ pour $t \geq 18,9$: on peut placer les cultures au bout de 19 minutes.

- 5) $T(0) = 20$ et $T'(0) = 2,55$: la tangente a pour équation $y = 2,55t + 20$. Elle atteint 37 lorsque

$2,55t = 17$, soit $t_0 = \frac{17}{2,55} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ min}$.

Phrase attendue : la tangente décrit ce qui se passerait si l'étuve continuait à chauffer à sa vitesse initiale de $2,55 \text{ } ^\circ\text{C}$ par minute. Or, plus la température se rapproche de la consigne, plus la vitesse de chauffe $T'(t)$ diminue : à t_0 , l'étuve n'est qu'à $T(t_0) \approx 30,7 \text{ } ^\circ\text{C}$, soit 63 % de l'écart initial comblé. Le nombre $t_0 = \frac{1}{0,15}$ est le temps caractéristique de l'étuve.

- 6) Une primitive de T est $t \mapsto 37t + \frac{17}{0,15}e^{-0,15t}$. Température moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} \int_0^{20} T(t) dt &= \frac{1}{20} \left[37t + \frac{17}{0,15} e^{-0,15t} \right]_0^{20} = \frac{1}{20} \left(740 + \frac{17}{0,15} (e^{-3} - 1) \right) \\ &= 37 - \frac{17}{3} (1 - e^{-3}) \approx 31,6 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$