



Calculatrice autorisée (mode examen)

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

*Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement, noté sur 20 points de mathématiques. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 dans l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie. À l'épreuve, la qualité de la rédaction compte pour 2 points sur 20 : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.*

Exercice 1 : Quatre questions de laboratoire

5 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3 \ln(x + 1)$.

- Calculer $f(0)$, puis montrer que $f(e - 1) = 5$.
- Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 8$; on donnera la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centième.

Question 2

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 4e^{-0,5t}$.

- Vérifier que, pour tout $t \geq 0$, $g'(t) = -2e^{-0,5t}$, puis en déduire le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.

Question 3

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' = 3y$, où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1) .
- Déterminer la solution y de (E_1) qui vérifie $y(0) = 2$.

Question 4

On considère la fonction h définie sur $[1; 4]$ par $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

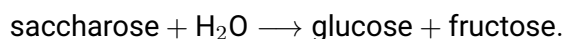
- Vérifier que la fonction H définie sur $[1; 4]$ par $H(x) = x^2 + \ln(x)$ est une primitive de h .
- En déduire la valeur exacte de $\int_1^4 h(x) \, dx$, puis la valeur moyenne de h sur $[1; 4]$, arrondie à 10^{-2} .

Exercice 2 : L'hydrolyse du saccharose

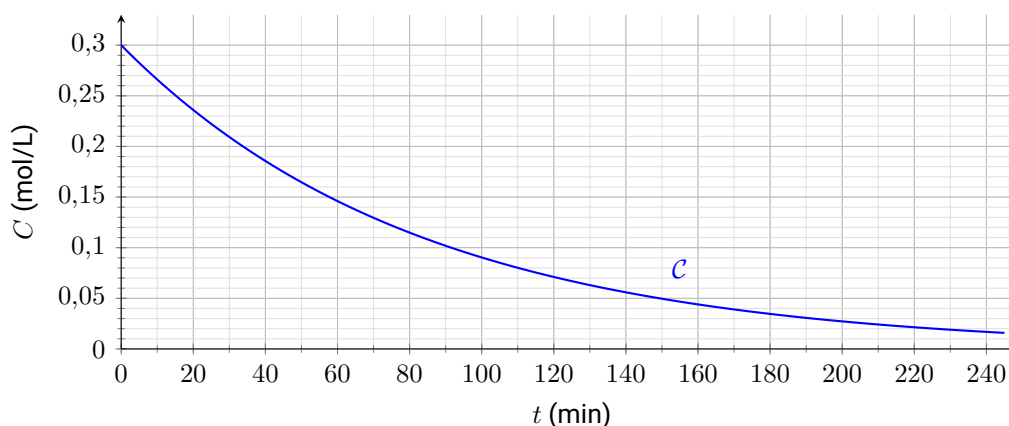
8 points

Dans cet exercice, les mathématiques et la physique-chimie se complètent : la cinétique fournit l'équation différentielle, les mathématiques la résolvent et confrontent le modèle à la courbe expérimentale.

En milieu acide, le saccharose (sucre de table) s'hydrolyse lentement en glucose et en fructose :



Dans un laboratoire, on suit cette réaction à 25 °C dans une solution contenant initialement du saccharose à la concentration $C_0 = 0,30$ mol/L. On note $C(t)$ la concentration en saccharose, en mol/L, à l'instant t exprimé en minutes. La courbe obtenue expérimentalement est représentée ci-dessous.



- 1) **Lecture graphique.** Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est l'instant où la concentration en saccharose a été divisée par deux. Déterminer graphiquement $t_{1/2}$ à 10 minutes près (on fera apparaître les traits de construction sur la copie).
- 2) La vitesse de disparition du saccharose est $v(t) = -C'(t)$. Dans les conditions de l'expérience, la réaction se comporte comme une réaction d'ordre 1 (l'eau est en large excès) : cette vitesse est proportionnelle à la concentration, $v(t) = k C(t)$, avec $k = 0,012 \text{ min}^{-1}$. Justifier que C est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,012 y.$$

- 3) On admet que les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto K e^{-0,012t}$, avec K réel. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $C(t) = 0,30 e^{-0,012t}$.
- 4) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de la réaction, par une phrase.
- 5)
 - a. Résoudre l'équation $C(t) = \frac{C_0}{2}$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur arrondie à 10^{-1} .
 - b. Comparer cette valeur à la lecture de la question 1, par une phrase.
- 6) On considère que la réaction est terminée lorsque 90 % du saccharose initial a été hydrolysé. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de minutes entières la réaction est terminée.
- 7)
 - a. Vérifier que la fonction F définie par $F(t) = -25 e^{-0,012t}$ est une primitive de C sur $[0; +\infty[$.
 - b. En déduire la valeur moyenne de la concentration en saccharose pendant la première heure, arrondie à 10^{-3} . Que représente cette valeur pour l'expérimentateur ?

Exercice 3 : La mise en température d'une étuve

7 points

Dans un laboratoire de microbiologie, une étuve est utilisée pour incuber des cultures à 37 °C. Le matin, elle est à la température de la salle, 20 °C, et on la met en marche à l'instant $t = 0$. On note $T(t)$ la température intérieure de l'étuve, en degrés Celsius, à l'instant t exprimé en minutes.

On modélise la température par la solution de l'équation différentielle

$$(E') : y' = -0,15y + 5,55,$$

où y est une fonction de t définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

- 1)
 - a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E') .
 - b. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $T(t) = 37 - 17e^{-0,15t}$.
- 2)
 - a. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $T'(t) = 2,55e^{-0,15t}$, puis en déduire le sens de variation de T sur $[0; +\infty[$.
 - b. Calculer $T(10)$; on arrondira au dixième de degré.
- 3) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$. Interpréter ce résultat pour l'étuve, par une phrase, et expliquer pourquoi la température ne dépasse jamais cette valeur.
- 4) Les cultures ne peuvent être placées dans l'étuve que lorsque sa température atteint 36 °C. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de minutes entières on peut placer les cultures. On donnera d'abord la valeur exacte de la solution de l'équation $T(t) = 36$.
- 5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de T au point d'abscisse 0, puis l'instant t_0 où cette tangente atteint la valeur 37. Expliquer, par une phrase, pourquoi l'étuve n'atteint pas 37 °C à l'instant t_0 .
- 6) Calculer la température moyenne de l'étuve pendant les 20 premières minutes, arrondie au dixième de degré.