

Exercice 1 – La tache lumineuse d'un projecteur de musée

8 points

- 1) Le plan du mur est perpendiculaire à l'axe du cône : la section d'un cône de révolution par un plan perpendiculaire à son axe (et ne passant pas par le sommet) est un **cercle**. La tache lumineuse est un disque. (1 pt)

- 2) Le plan du mur est toujours perpendiculaire à l'axe : la tache est encore un **cercle**. (1,5 pt)
Sur la vue de côté, les rayons extrêmes et le mur forment deux triangles semblables (configuration de Thalès de sommet L) : le diamètre de la tache est **proportionnel** à la distance de la lampe au mur. À 2,00 m le diamètre vaut 2,31 m, donc à 3,00 m :

$$2,31 \times \frac{3,00}{2,00} = 3,465 \approx \boxed{3,5 \text{ m}} \text{ (au décimètre).}$$

- 3) L'axe fait un angle $\beta = 60^\circ$ avec le plan du mur, **plus grand** que le demi-angle 30° du cône : le plan coupe toutes les génératrices (tous les rayons lumineux atteignent le mur, le rayon du bas étant même horizontal) et la section est une **ellipse**. La tache est une ellipse allongée vers le haut. (1 pt)

- 4) $PQ = 3,60 - 1,00 = \boxed{2,60 \text{ m}}$. (1,5 pt)

Le centre d'une ellipse est le milieu de son grand axe, situé à $1,00 + \frac{2,60}{2} = 2,30 \text{ m}$ du sol. Or M est à 1,87 m du sol : $PM = 0,87 \text{ m}$ et $MQ = 1,73 \text{ m}$, donc M **n'est pas le centre** de la tache. Le point où l'axe du faisceau touche le mur est plus bas que le centre de l'ellipse : la lumière « s'étire » vers le haut, du côté où les rayons arrivent le plus en biais.

- 5) Le tracé attendu : une ellipse allongée verticalement, de grand axe $[PQ]$, symétrique par rapport à (PQ) , et en Q une droite qui touche la courbe sans la traverser. La tangente en Q est **perpendiculaire au grand axe $[PQ]$** : elle est horizontale sur le mur (il en est de même en P). (1 pt : 0,5 tracé + 0,5 réponse)

Pour comprendre. La tangente en Q est la position limite des sécantes passant par Q . Une sécante passant par Q et par un point de l'ellipse a pour symétrique, par rapport à (PQ) , une sécante passant par Q et par le point symétrique; lorsque ces points se rapprochent de Q , les deux sécantes tendent vers la même position limite, qui est donc sa propre symétrique par rapport à (PQ) : c'est la perpendiculaire à (PQ) en Q .

- 6) (2 pts : 0,75 + 0,75 + 0,5)

- a. Pour $\beta = 30^\circ$, l'angle entre l'axe et le plan est **égal** au demi-angle du cône : le plan du mur est parallèle à une génératrice (le rayon du haut) et la section est une **parabole**. Sur le mur, la tache n'est plus fermée : le bas de la tache reste arrondi (sommet de la parabole, là où arrive le rayon extrême du bas, qui joue le rôle de P), mais les deux bords montent sans se rejoindre.
- b. Pour $\beta = 15^\circ$, l'angle est **plus petit** que 30° : le plan coupe le cône selon une **hyperbole** (une seule branche est éclairée, le mur ne coupant que la nappe du cône qui part de la lampe). La tache est encore ouverte, avec des bords qui s'écartent de plus en plus et une partie du faisceau qui ne touche plus le mur.

- c. La tache est une courbe fermée (cercle ou ellipse) lorsque $\beta > 30^\circ$, c'est-à-dire lorsque l'angle entre l'axe du faisceau et le mur est strictement supérieur au demi-angle du cône. Dès que $\beta \leq 30^\circ$, une partie de la lumière file le long du mur ou au-delà : la tache n'est plus fermée.

Exercice 2 — Le profil d'une chaise longue

8 points

- 1) $f(0) = 0,1 \times 0^2 + 0,5 = 0,5$ et $f(5) = 0,1 \times 25 + 0,5 = 2,5 + 0,5 = 3$. Les points $B(0; 0,5)$ et $C(5; 3)$ sont donc bien sur la parabole : ce sont ses deux extrémités, où elle rejoint l'assise et l'appui-tête (continuité du tracé). (1 pt)

- 2) f est un polynôme du second degré : $f'(x) = 0,1 \times 2x + 0 = 0,2x$. (1 pt)

- 3) $f'(0) = 0,2 \times 0 = 0$: le coefficient directeur de la tangente en B est nul, la tangente à la parabole en B est **horizontale**. (1,5 pt)

Le segment $[AB]$ est lui aussi horizontal et passe par B : la droite (AB) est exactement la tangente à la parabole en B . Les deux morceaux passent par le même point **et** ont la même tangente : l'assise et le dossier se raccordent **sans cassure** en B .

- 4) $f'(5) = 0,2 \times 5 = 1$. La tangente en C a pour équation $y = f'(5)(x - 5) + f(5) = 1 \times (x - 5) + 3$, soit $y = x - 2$. (2 pts : 1 + 0,5 + 0,5)
Pour $x = 6$: $x - 2 = 4$, qui est bien l'ordonnée de E . Donc $E(6; 4) \in T$.

- 5) Avec la formule de la distance dans un repère orthonormé : (1 pt)

$$\Omega C = \sqrt{(5 - 4)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ dm};$$

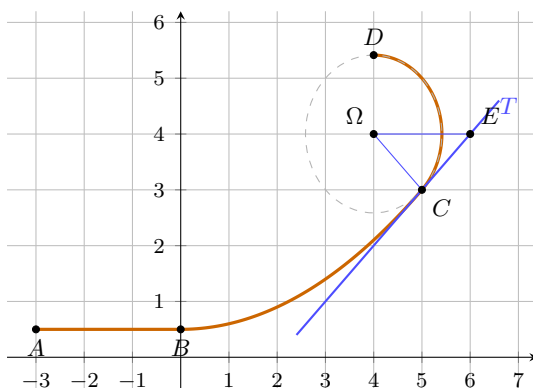
$$\Omega E = \sqrt{(6 - 4)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ dm};$$

$$CE = \sqrt{(6 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ dm}.$$

- 6) (1,5 pt : 0,5 + 0,5 + 0,5)

- a. $\Omega C^2 + CE^2 = 2 + 2 = 4$ et $\Omega E^2 = 4$. On a $\Omega E^2 = \Omega C^2 + CE^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ΩCE est **rectangle en C** .

- b. La droite (CE) , c'est-à-dire T , est donc perpendiculaire au rayon $[\Omega C]$ du cercle de centre Ω passant par C : T est la **tangente au cercle en C** . La parabole et le cercle passent tous deux par C et y ont la même tangente T : le dossier et l'appui-tête se raccordent **sans cassure** en C . (Un centre comme $\Omega'(4; 3)$ ne conviendrait pas : $\Omega'E^2 = 5 \neq \Omega'C^2 + CE^2 = 3$, le rayon ne serait pas perpendiculaire à T et le profil aurait une cassure.)



Le profil complet : tangente T en C , rayon $[\Omega C]$ perpendiculaire à T , triangle ΩCE rectangle en C .

- c. Le point le plus haut du cercle est à la verticale de Ω , à la distance du rayon $\Omega C = \sqrt{2}$ au-dessus : $y_D = 4 + \sqrt{2} \approx 5,414$ dm. **Le haut de l'appui-tête est à environ 54 cm du sol.**

Exercice 3 – Le plateau d'une table basse (copie d'un élève)

4 points

- 1) Les calculs sont justes : $O_1M = 3$ et $O_2M = 2$, donc M est bien sur les deux cercles. Mais **un point commun ne suffit pas** : il assure seulement que le tracé est continu (pas de trou). Pour un raccordement sans cassure, il faut aussi que les deux arcs aient **la même tangente** en M . (1,5 pt)
 Complément : la tangente à $\mathcal{C}_1$ en M est perpendiculaire au rayon $[O_1M]$, et la tangente à $\mathcal{C}_2$ en M est perpendiculaire au rayon $[O_2M]$. Or O_1, M et O_2 sont alignés (tous trois sur l'axe des abscisses, $O_1O_2 = 5 = 3 + 2$: les cercles sont tangents extérieurement). Les deux tangentes sont perpendiculaires à la même droite (O_1O_2) au même point M : c'est la **même droite**, la verticale d'équation $x = 3$. Les deux arcs se raccordent donc bien sans cassure en M .
- 2) La réponse 2 est correcte. Elle utilise la propriété « la tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon passant par ce point » : $[O_1K]$ est vertical ($O_1(0; 0)$ et $K(0; 3)$), donc la tangente à $\mathcal{C}_1$ en K est horizontale; c'est la droite (NK) , car N et K ont la même ordonnée.
 3. Même point K et même tangente : raccordement sans cassure. (1 pt)
- 3) Pour qu'un point soit sur $\mathcal{C}_2$, il faut que sa distance à O_2 soit égale au rayon 2 (le calcul « $0 + 3 = 3 \leq 5$ » n'a pas de sens). (1,5 pt)
 $O_2K = \sqrt{(0-5)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx \text{5,83 dm}$, et $5,83 \neq 2$: le point K n'est pas sur $\mathcal{C}_2$. Le segment $[NK]$ se raccorde au cercle $\mathcal{C}_1$ seulement; le cercle $\mathcal{C}_2$ n'intervient qu'à partir du point M .