

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – La tache lumineuse d'un projecteur de musée

8 points

Une éclairagiste règle un projecteur orientable qui éclaire le mur d'une salle de musée. Le faisceau lumineux est un **cône de révolution** de sommet L (la lampe) : l'angle entre l'axe du faisceau et chaque rayon lumineux extrême mesure 30° (figure 1). La tache lumineuse sur le mur est la section de ce cône par le plan du mur.

On rappelle que la nature de la section dépend de l'angle β entre l'axe du cône et le plan de coupe, comparé au demi-angle 30° du cône.

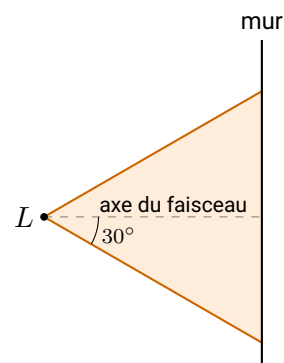


Figure 1 – vue de côté

- 1) Le projecteur est d'abord dirigé perpendiculairement au mur ($\beta = 90^\circ$), la lampe étant à 2,00 m du mur. Quelle est la nature de la tache lumineuse? Justifier.
- 2) Dans cette position, la tache mesure 2,31 m de diamètre. L'éclairagiste recule le projecteur à 3,00 m du mur, toujours perpendiculairement. Quelle est la nature de la nouvelle tache? Calculer son diamètre, arrondi au décimètre, en expliquant la méthode.
- 3) L'éclairagiste replace la lampe à 1,50 m du mur et à 1,00 m du sol, puis incline le faisceau vers le haut : l'axe fait maintenant un angle $\beta = 60^\circ$ avec le plan du mur (figure 2). Quelle est la nature de la tache lumineuse? Justifier.

Sur la figure 2, le rayon extrême du bas est horizontal et touche le mur en P , à 1,00 m du sol; l'axe du faisceau touche le mur en M , à 1,87 m du sol; le rayon extrême du haut touche le mur en Q , à 3,60 m du sol. Le segment $[PQ]$ est le **grand axe** de la tache lumineuse.

- 4) Calculer la longueur du grand axe PQ . Le point M est-il le centre de la tache lumineuse? Justifier par un calcul.
- 5) On admet que la tache est symétrique par rapport à la droite (PQ) . Tracer à main levée l'allure de l'ellipse et sa tangente en Q . Comment cette tangente est-elle placée par rapport au grand axe $[PQ]$?

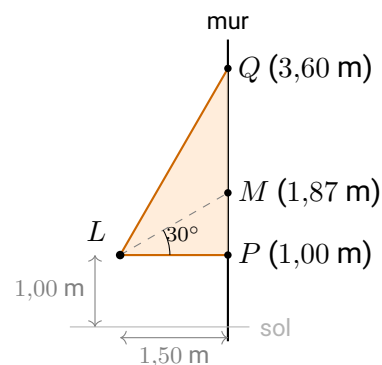


Figure 2 – vue de côté, $\beta = 60^\circ$ (pas à l'échelle)

- 6) L'éclairagiste continue d'incliner le projecteur vers le haut.
 - a. Pour $\beta = 30^\circ$, le rayon extrême du haut devient parallèle au mur. Quelle est alors la nature de la tache lumineuse? Décrire ce que l'on observe sur le mur.
 - b. Même question pour $\beta = 15^\circ$.
 - c. Pour quelles valeurs de l'angle β la tache lumineuse est-elle une courbe fermée?

Exercice 2 – Le profil d’une chaise longue

8 points

Une designer dessine le profil d’une chaise longue (figure 3, repère orthonormé d’unité 1 dm) en trois morceaux : l’**assise**, segment horizontal $[AB]$ avec $A(-3; 0,5)$ et $B(0; 0,5)$; le **dossier**, arc de parabole représentant la fonction f définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = 0,1x^2 + 0,5$, qui va de B à $C(5; 3)$; l’**appui-tête**, arc du cercle de centre $\Omega(4; 4)$ passant par C , qui va de C au point D le plus haut du cercle. Pour le confort, les morceaux se raccordent **sans cassure** : même point **et** même tangente au raccordement.

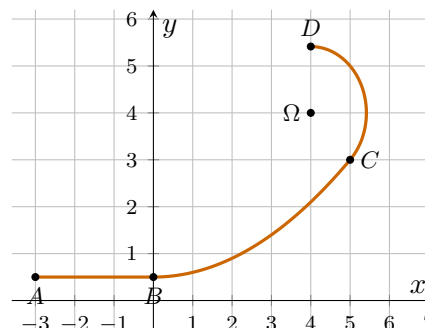


Figure 3 – profil de la chaise longue (unité : 1 dm)

- 1) Calculer $f(0)$ et $f(5)$. Que peut-on en déduire pour les points B et C ?
- 2) Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f .
- 3) **Raccordement en B .** Calculer $f'(0)$. En déduire la direction de la tangente à la parabole en B , puis expliquer pourquoi l’assise et le dossier se raccordent sans cassure.
- 4) **Tangente en C .** Calculer $f'(5)$, montrer qu’une équation de la tangente T à la parabole au point C est $y = x - 2$, puis vérifier que le point $E(6; 4)$ appartient à T .
- 5) Calculer les longueurs ΩC , ΩE et CE (valeurs exactes, puis arrondies à 0,01 dm).
- 6) **Raccordement en C** (rappel : la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de contact).
 - a. Montrer que le triangle ΩCE est rectangle en C .
 - b. En déduire que la droite T est tangente au cercle de centre Ω en C , puis que le dossier et l’appui-tête se raccordent sans cassure en C .
 - c. Calculer la hauteur du point D , le plus haut de la chaise longue, arrondie au centimètre.

Exercice 3 – Le plateau d’une table basse (copie d’un élève)

4 points

Le bord avant d’un plateau de table basse, vu de dessus (figure 4, repère orthonormé d’unité 1 dm), est formé du segment $[NK]$ avec $N(-4; 3)$ et $K(0; 3)$, du quart du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $O_1(0; 0)$ et de rayon 3 allant de K à $M(3; 0)$, puis du demi-cercle du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $O_2(5; 0)$ et de rayon 2 allant de M à $R(7; 0)$ sous l’axe des abscisses. Un élève a rédigé trois réponses pour vérifier que le bord est « sans cassure » (même point et même tangente).

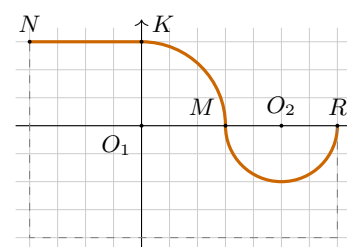


Figure 4 – vue de dessus (unité : 1 dm)

Réponse 1. Le point M est sur $\mathcal{C}_1$ car $O_1M = 3$ et sur $\mathcal{C}_2$ car $O_2M = 5 - 3 = 2$. Les deux arcs ont donc un point commun : ils se raccordent sans cassure en M .

Réponse 2. Le rayon $[O_1K]$ est vertical, donc la tangente à $\mathcal{C}_1$ en K est horizontale, comme le segment $[NK]$: le segment et l’arc se raccordent sans cassure en K .

Réponse 3. Le point K est aussi sur le cercle $\mathcal{C}_2$, car $0 + 3 = 3$ et $3 \leq 5$.

- 1) La conclusion de la réponse 1 est juste, mais l’argument ne suffit pas : expliquer ce qui manque, puis compléter la justification (penser aux tangentes aux deux cercles en M et à l’alignement de O_1 , M , O_2).
- 2) La réponse 2 est-elle correcte ? Expliquer en citant la propriété utilisée.
- 3) La réponse 3 est fausse. Calculer la longueur O_2K (arrondie à 0,01 dm) et corriger la réponse.