

Exercice 1 : Une fonction avec un logarithme

4 points

Barème : 1) 2 pts; 2) 2 pts.

1) a. $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$.

b. Sur $[0,5; 5]$, $x > 0$ et $x + 2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$, négatif sur $[0,5; 2]$ et positif sur $[2; 5]$. Le minimum vaut $f(2) = 4 - 8 \ln(2) \approx -1,55$. On a aussi $f(0,5) = 0,25 - 8 \ln(0,5) = 0,25 + 8 \ln(2) \approx 5,80$ et $f(5) = 25 - 8 \ln(5) \approx 12,12$.

x	0,5	2	5
$f'(x)$	−	0	+
f	$0,25 + 8 \ln 2$	$4 - 8 \ln 2$	$25 - 8 \ln 5$

2) a. Sur $[0,5; 2]$, f est continue et strictement décroissante de $f(0,5) \approx 5,80 > 0$ à $f(2) \approx -1,55 < 0$: l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α dans cet intervalle. Sur $[2; 5]$, f est continue et strictement croissante de $f(2) < 0$ à $f(5) \approx 12,12 > 0$: exactement une solution β . Au total, **exactement deux solutions**, avec $0,5 < \alpha < 2 < \beta < 5$.

b. Tableau de valeurs de la calculatrice : $f(1,19) \approx 0,02 > 0$ et $f(1,20) \approx -0,02 < 0$, donc $\alpha \approx 1,20$; $f(2,93) \approx -0,02 < 0$ et $f(2,94) \approx 0,02 > 0$, donc $\beta \approx 2,93$.

c. D'après les variations, f est positive avant α , négative entre α et β , positive après β .

x	0,5	α	β	5	
$f(x)$	+	0	−	0	+

Exercice 2 : Une seringue de technétium 99m

8 points

Barème : 1) 0,5 pt; 2) 1,5 pt; 3) 1 pt; 4) 1 pt; 5) 1,5 pt; 6) 2 pts; 7) 0,5 pt.

1) Entre 0 et 2 h : $\frac{740 - 588}{740} \approx 0,205$, soit une baisse de **20,5 %**. Entre 2 h et 4 h : $\frac{588 - 467}{588} \approx 0,206$, soit **20,6 %**. On remarque que l'activité baisse pratiquement du même pourcentage, environ 20,5 %, toutes les deux heures, quelle que soit sa valeur : c'est le comportement d'une exponentielle décroissante.

2) a. L'équation $y' = -ky$ est du type $y' = ay$ avec $a = -k$: ses solutions sont les fonctions $y(t) = Ke^{-kt}$, $K \in \mathbb{R}$.

b. $A(0) = 740$ donne $K = 740$, donc $A(t) = 740e^{-kt}$ (en MBq, t en heures).

$$3) A(2) = 588 \iff 740 e^{-2k} = 588 \iff e^{-2k} = \frac{588}{740}, \text{ donc}$$

$$-2k = \ln\left(\frac{588}{740}\right) \iff k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{740}{588}\right) \approx 0,1150, \text{ soit } \boxed{k \approx 0,115 \text{ h}^{-1}}.$$

$$4) A(8) = 740 e^{-0,115 \times 8} = 740 e^{-0,92} \approx \boxed{295 \text{ MBq}}, \text{ contre } 294 \text{ MBq mesurés.}$$

Réponse rédigée : l'écart entre la prévision et la mesure est de 1 MBq, soit environ 0,3 % de la valeur mesurée, ce qui est de l'ordre de la précision des mesures (données au MBq près). On peut aussi vérifier $A(4) \approx 467 \text{ MBq}$, exactement la valeur mesurée. Le modèle est donc compatible avec les mesures.

$$5) \text{ a. } A(t_1) = 370 \iff 740 e^{-kt_1} = 370 \iff e^{-kt_1} = \frac{1}{2} \iff -k t_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \iff$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\ln(2)}{k}}.$$

$$\text{Avec } k = 0,115 : t_1 \approx \boxed{6,0 \text{ h}}.$$

$$\text{b. } A(t_2) = 185 \iff e^{-kt_2} = \frac{185}{740} = \frac{1}{4} \iff t_2 = \frac{\ln(4)}{k} = \frac{2 \ln(2)}{k} \approx \boxed{12,1 \text{ h}}. \text{ Pour passer de } 370 \text{ à } 185 \text{ MBq, il a fallu } t_2 - t_1 = \frac{2 \ln(2)}{k} - \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{k} \approx \boxed{6,0 \text{ h}} : \text{ exactement la même durée que pour passer de } 740 \text{ à } 370 \text{ MBq.}$$

Phrase attendue : partant d'une activité A_1 à un instant τ , on a $A(\tau + d) = A_1 e^{-kd}$, et la condition $A(\tau + d) = \frac{A_1}{2}$ donne $e^{-kd} = \frac{1}{2}$: l'activité de départ se simplifie, si bien que la durée $\frac{\ln 2}{k}$ ne dépend que de la constante radioactive k , c'est-à-dire du noyau considéré. (Valeur tabulée pour le technétium 99m : 6,0 h.)

$$6) \text{ a. Une primitive de } t \mapsto 740 e^{-kt} \text{ est } \boxed{t \mapsto -\frac{740}{k} e^{-kt}}, \text{ avec } k = 0,115. \text{ Donc}$$

$$\int_0^{24} A(t) dt = \left[-\frac{740}{0,115} e^{-0,115t} \right]_0^{24} = \boxed{\frac{740}{0,115} (1 - e^{-2,76})} \approx \boxed{6\,028 \text{ MBq} \cdot \text{h}}.$$

Interprétation : l'activité est un nombre de désintégrations par unité de temps ; son intégrale sur $[0 ; 24]$ « additionne » ces désintégrations : elle représente le nombre total de désintégrations survenues dans la seringue pendant les 24 premières heures (c'est aussi le nombre de noyaux de technétium 99m disparus).

$$\text{b. } 1 \text{ MBq pendant une heure : } 10^6 \text{ désintégrations par seconde pendant } 3\,600 \text{ s, soit } 10^6 \times 3\,600 = 3,6 \times 10^9 \text{ désintégrations. Nombre de désintégrations en } 24 \text{ h : } 6\,028 \times 3,6 \times 10^9 \approx \boxed{2,17 \times 10^{13}}. \text{ Énergie émise : } 2,17 \times 10^{13} \times 2,25 \times 10^{-14} \approx \boxed{0,49 \text{ J}}.$$

$$7) A(24) = 740 e^{-2,76} \approx 47 \text{ MBq.}$$

Discussion rédigée : au bout de 24 heures, il se produit encore environ 47 millions de désintégrations par seconde dans la seringue : l'activité a été divisée par 16 environ (quatre demi-vies, $740/16 \approx 46$), mais elle est loin d'être nulle, et le modèle exponentiel ne s'annule d'ailleurs jamais. L'affirmation de l'agent est donc fausse : la seringue doit rester dans son conteneur. En pratique, de tels déchets sont conservés pendant au moins une dizaine de demi-vies, soit 60 h environ, où l'activité n'est plus que de $740/2^{10} \approx 0,7 \text{ MBq}$, puis contrôlés avant d'être évacués.

Exercice 3 : Le réservoir sur tour d'un village

6 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1,5 pt; 3) 1,5 pt; 4) 1 pt; 5) 1 pt.

- 1) d est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 1$, soit $\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{2}$, $t = 6$: à $6 + 6 = 12$ h, c'est-à-dire midi, avec $d(6) = 70 \text{ m}^3/\text{h}$.

Explication : $V'(t) = 40 - d(t) = -30 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Pour $t \in [0; 12]$, $\frac{\pi t}{12} \in [0; \pi]$ et le sinus est positif : $V'(t) \leq 0$, la consommation dépasse le débit de la pompe, le réservoir se vide. Pour $t \in [12; 24]$, le sinus est négatif : $V'(t) \geq 0$, la pompe apporte plus que ce qui est consommé, le réservoir se remplit.

- 2) a. Primitive de $f(at)$ avec $f = \sin$ et $a = \frac{\pi}{12}$: la fonction $t \mapsto -\frac{12}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. (Vérification : sa dérivée est $-\frac{12}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.)

- b. V est une primitive de $V' = -30 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, donc $V(t) = -30 \times \left(-\frac{12}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + C = \frac{360}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + C$. La condition $V(0) = 300$ donne $\frac{360}{\pi} + C = 300$, soit $C = 300 - \frac{360}{\pi}$, d'où

$$V(t) = 300 + \frac{360}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 1 \right).$$

- 3) a. D'après la question 1, V décroît sur $[0; 12]$ puis croît : le minimum est atteint en $t = 12$: $V(12) = 300 + \frac{360}{\pi}(\cos \pi - 1) = 300 - \frac{720}{\pi} \approx 71 \text{ m}^3$ (à 18 h).

- b. Réponse rédigée : à 18 h, le réservoir ne contient plus qu'environ 71 m^3 , moins que la réserve incendie de 100 m^3 : la contrainte n'est pas respectée. Le volume perdu entre 6 h et 18 h est $\frac{720}{\pi} \approx 229,2 \text{ m}^3$ quel que soit le volume de départ ; il faut donc au moins $100 + \frac{720}{\pi} \approx 329,2$, soit 330 m^3 à 6 h du matin (en arrondissant au m^3 supérieur) pour que la réserve reste toujours disponible.

- 4) Une primitive de $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ est $\frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, nulle en 0 et en 24 (car $\sin(2\pi) = 0$). Donc

$$\int_0^{24} V(t) dt = \int_0^{24} \left(300 - \frac{360}{\pi} \right) dt + \frac{360}{\pi} \int_0^{24} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt = 24 \left(300 - \frac{360}{\pi} \right) + 0,$$

et la valeur moyenne vaut $\frac{1}{24} \int_0^{24} V(t) dt = 300 - \frac{360}{\pi} \approx 185 \text{ m}^3$.

- 5) $V(24) = 300 + \frac{360}{\pi}(\cos(2\pi) - 1) = 300 + 0 = 300 \text{ m}^3$: le réservoir est revenu à son volume initial.

Explication : la consommation totale de la journée est

$$\int_0^{24} d(t) dt = \int_0^{24} 40 dt + 30 \int_0^{24} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt = 960 + 0 = 960 \text{ m}^3,$$

car les apports du sinus se compensent sur une période complète. Or la pompe fournit $40 \times 24 = 960 \text{ m}^3$ dans la journée : ce qui est consommé est exactement remplacé, le bilan de la journée est nul.

Maîtrise de la langue

2 points

Les deux points sont attribués par une appréciation globale de l'ensemble des réponses rédigées de la copie, en particulier des phrases d'interprétation et de conclusion demandées (exercice 2, questions 4, 5b, 6a et 7 ; exercice 3, questions 1, 3b et 5). Grille de référence : annexe « Attendus et observables rédactionnels » de la note de service du 11-9-2026 (BO spécial n° 4 du 17 septembre 2026), résumée ci-dessous.

	Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
Orthographe	Erreurs très fréquentes, y compris sur des règles simples (accords sujet-verbe, accords dans le groupe nominal).	Erreurs fréquentes ou répétées (accords, conjugaison, homophones).	Erreurs ponctuelles, qui ne se répètent pas de façon systématique.	Orthographe maîtrisée; erreurs rares et isolées.
Syntaxe, construction des phrases	Nombreuses phrases mal construites ou incompréhensibles; ponctuation inopérante.	Construction fragile, maladresses récurrentes, phrases parfois mal structurées.	Phrases globalement bien construites malgré quelques maladresses ponctuelles.	Phrases correctement construites, syntaxe maîtrisée, voire riche (subordination, coordination).
Lexique	Lexique, notamment scientifique, très pauvre ou employé à mauvais escient.	Lexique pauvre et parfois employé à mauvais escient.	Lexique, notamment scientifique, globalement correct.	Lexique riche et correctement utilisé.
Mise en forme et organisation de la réflexion	Le propos n'est pas organisé.	Le propos est organisé de manière peu pertinente.	Le propos est organisé de manière globalement cohérente.	Le propos est cohérent et suit un fil conducteur perceptible et pertinent.

Conversion en points (proposition de la fabrique, non officielle). La note de service ne fixe pas de barème chiffré pour ces paliers. On propose de retenir le palier dominant sur les quatre dimensions :

Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
0 point	0,5 point	1,5 point	2 points

Les mathématiques comptent pour leur part : une phrase juste et bien écrite qui conclut un calcul faux n'apporte rien sur les dix-huit points de mathématiques, mais elle compte pour la maîtrise de la langue. À l'inverse, des résultats exacts alignés sans aucune phrase ne permettent pas d'atteindre le palier « satisfaisant ».