



Calculatrice autorisée (mode examen)

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement. Barème rapporté sur 20 : 18 points de mathématiques et 2 points de maîtrise de la langue. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 et la maîtrise de la langue pour 2 points sur l'ensemble de l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.

Exercice 1 : Une fonction avec un logarithme

4 points

On considère la fonction f définie sur $[0,5 ; 5]$ par $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$.

- 1)
 - a. Montrer que, pour tout $x \in [0,5 ; 5]$, $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,5 ; 5]$ et dresser le tableau de variations de f . On donnera la valeur exacte du minimum, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 2)
 - a. Justifier, à l'aide du tableau de variations, que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0,5 ; 5]$. On les note α et β avec $\alpha < \beta$.
 - b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α et de β à 10^{-2} près.
 - c. En déduire le tableau de signes de f sur $[0,5 ; 5]$.

Exercice 2 : Une seringue de technétium 99m

8 points

Dans cet exercice, la physique fournit les mesures et la loi de décroissance; les mathématiques construisent le modèle, le confrontent aux mesures et l'exploitent.

Dans un service de médecine nucléaire, on a préparé pour une scintigraphie osseuse une seringue de technétium 99m, un noyau radioactif dont le rayonnement gamma est détecté par une caméra. L'examen étant reporté, la seringue est rangée dans un conteneur en plomb et l'on mesure régulièrement son activité A , c'est-à-dire le nombre de désintégrations qui s'y produisent par seconde. L'activité s'exprime en becquerels (1 Bq = 1 désintégration par seconde), ici en mégabecquerels (1 MBq = 10^6 Bq), et le temps t en heures :

t (h)	0	2	4	8
A (MBq)	740	588	467	294

Les physiciens admettent que la fonction A est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = -k y$, où $k > 0$ est la constante radioactive du technétium 99m, en h^{-1} .

- 1) Calculer la baisse relative de l'activité, en pourcentage arrondi à 0,1 %, entre 0 et 2 h, puis entre 2 h et 4 h. Que remarque-t-on ?
- 2)
 - a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = -k y$.
 - b. En déduire l'expression de $A(t)$ en fonction de t et de k .

- 3) À l'aide de la mesure faite à $t = 2$ h, déterminer la valeur de k , arrondie à 10^{-3} . **Dans toute la suite, on prendra $k = 0,115 \text{ h}^{-1}$.**
- 4) Calculer l'activité prévue par le modèle à $t = 8$ h, arrondie au MBq, et la comparer à la mesure. Le modèle est-il compatible avec les mesures? Rédiger la réponse.
- 5)
 - a. Déterminer par le calcul l'instant t_1 où l'activité, partie de 740 MBq, atteint 370 MBq. Montrer que $t_1 = \frac{\ln(2)}{k}$, puis en donner une valeur arrondie au dixième d'heure.
 - b. Déterminer de même l'instant t_2 où l'activité atteint 185 MBq. Combien de temps a-t-il fallu pour passer de 370 MBq à 185 MBq? Comparer avec t_1 , puis expliquer, par une phrase, pourquoi la durée nécessaire pour diviser l'activité par deux ne dépend pas de l'activité de départ. Cette durée est la demi-vie du technétium 99m.
- 6)
 - a. Déterminer une primitive de A , puis la valeur exacte de $\int_0^{24} A(t) dt$ et sa valeur arrondie à l'unité. Cette intégrale s'exprime en MBq·h : que représente-t-elle pour le physicien?
 - b. Justifier qu'une activité de 1 MBq maintenue pendant une heure correspond à $3,6 \times 10^9$ désintégrations. En déduire le nombre de désintégrations survenues dans la seringue pendant les 24 premières heures, puis l'énergie émise sous forme de rayonnement gamma, en joules, arrondie à 10^{-2} . *Donnée : on admet que chaque désintégration s'accompagne de l'émission d'un photon gamma d'énergie $2,25 \times 10^{-14} \text{ J}$.*
- 7) Un agent affirme : « au bout de 24 heures, la seringue est inoffensive, il n'y a plus rien de radioactif dedans ». Calculer $A(24)$ et discuter cette affirmation en quelques lignes.

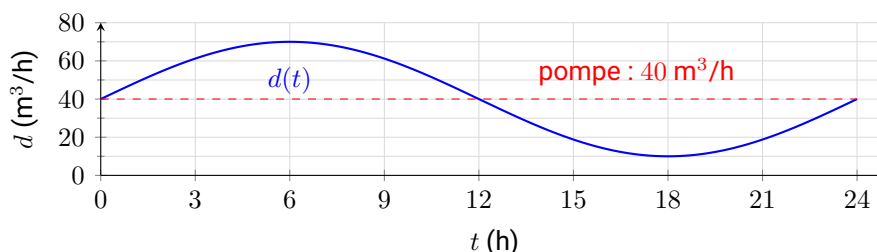
Exercice 3 : Le réservoir sur tour d'un village

6 points

Un village est alimenté en eau par un réservoir sur tour (château d'eau). Une pompe y envoie de l'eau avec un débit constant de $40 \text{ m}^3/\text{h}$. La consommation des habitants varie au cours de la journée : on la modélise, en m^3/h , par

$$d(t) = 40 + 30 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right), \quad t \in [0; 24],$$

où t est le temps en heures écoulé depuis 6 h du matin. Le réservoir contient 300 m^3 à $t = 0$; on note $V(t)$ le volume d'eau qu'il contient, en m^3 , à l'instant t .



Le volume d'eau varie à chaque instant selon la différence entre ce qui entre et ce qui sort : on admet que V est dérivable et que $V'(t) = 40 - d(t)$ pour tout $t \in [0; 24]$.

- 1) À quelle heure la consommation est-elle maximale? Expliquer pourquoi le volume du réservoir diminue sur $[0; 12]$ et augmente sur $[12; 24]$.

- 2) a. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ sur $[0 ; 24]$.
b. En déduire que, pour tout $t \in [0 ; 24]$, $V(t) = 300 + \frac{360}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 1 \right)$.
- 3) a. Calculer le volume minimal contenu dans le réservoir au cours de la journée, arrondi au m^3 .
b. Le règlement du service des eaux impose qu'une réserve incendie de 100 m^3 reste disponible à tout instant. Cette contrainte est-elle respectée ? Si non, déterminer le volume minimal, arrondi au m^3 supérieur, que devrait contenir le réservoir à 6 h du matin pour qu'elle le soit. Rédiger la réponse.
- 4) Calculer la valeur moyenne de V sur $[0 ; 24]$, arrondie au m^3 .
- 5) Montrer que le réservoir retrouve à $t = 24$ exactement son volume initial, et expliquer ce résultat à l'aide de la consommation totale de la journée.

Maîtrise de la langue

2 points

La qualité de la rédaction, l'orthographe, la syntaxe et la précision du vocabulaire sont évaluées sur l'ensemble de la copie, en particulier dans les réponses rédigées demandées aux exercices 2 et 3.