

Exercice 1 : Complexes, oscillations et logarithme

5 points

Barème : question 1 : 1,5 pt; question 2 : 1,5 pt; question 3 : 1 pt; question 4 : 1 pt.

Question 1

a. $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Un argument θ vérifie $\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Ainsi $z = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b. $z^2 = (3\sqrt{2})^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = 18e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Comme $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$, on obtient $z^2 = -18i$.
Vérification : $(3 - 3i)^2 = 9 - 18i + 9i^2 = 9 - 18i - 9 = -18i$.

Question 2

a. $g'(t) = -12\sin(3t) - 6\cos(3t)$ et $g''(t) = -36\cos(3t) + 18\sin(3t) = -9g(t)$. Donc $g''(t) + 9g(t) = 0$ pour tout t : g est solution de $y'' + 9y = 0$.

b. D'après la formule d'addition, $A\cos(3t + \varphi) = A\cos\varphi\cos(3t) - A\sin\varphi\sin(3t)$. On veut donc $A\cos\varphi = 4$ et $A\sin\varphi = 2$. En élevant au carré et en ajoutant : $A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 16 + 4 = 20$, donc $A = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Puis $\cos\varphi = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cosinus et le sinus sont positifs : $\varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et la calculatrice donne $\varphi \approx 0,46 \text{ rad}$.

Question 3

a. $k = uv - x$ avec $u(x) = x$, $v(x) = \ln(x)$: $k'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

b. k est donc une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$:

$$\int_1^e \ln(x) dx = k(e) - k(1) = (e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

Question 4

L'écriture $z' = e^{i\theta}z$ avec $\theta = \frac{\pi}{3}$ caractérise la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'affixe de A' est $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 2 : Le filtre d'une enceinte acoustique

7 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1,5 pt; 3) 1,5 pt; 4) 1,5 pt; 5) 1,5 pt.

1) $i = 0,5\cos(w)$ avec $w(t) = \omega t$, $w'(t) = \omega$, et $(\cos w)' = -w' \sin w$: $i'(t) = -0,5\omega \sin(\omega t)$. Alors

$$u(t) = 6 \times 0,5\cos(\omega t) + L \times (-0,5\omega \sin(\omega t)) = 3\cos(\omega t) - 0,5L\omega \sin(\omega t) = 3\cos(\omega t) - 4\sin(\omega t),$$

puisque $L\omega = 8$.

- 2) $|\underline{Z}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \boxed{10}$. Un argument φ vérifie $\cos \varphi = \frac{6}{10} = 0,6$ et $\sin \varphi = \frac{8}{10} = 0,8$; il est dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ et la calculatrice donne $\varphi \approx 0,93 \text{ rad}$ (environ 53°). D'où $\underline{Z} = 10 e^{j\varphi}$.

- 3) a. Formule d'addition :

$$\begin{aligned} 5 \cos(\omega t + \varphi) &= 5 \cos \varphi \cos(\omega t) - 5 \sin \varphi \sin(\omega t) \\ &= 5 \times 0,6 \cos(\omega t) - 5 \times 0,8 \sin(\omega t) = 3 \cos(\omega t) - 4 \sin(\omega t) = u(t). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u(t) = 5 \cos(\omega t + \varphi)}$.

- b. *Réponse rédigée attendue* : le nombre 5 est l'amplitude de la tension, en volts : u oscille entre -5 V et 5 V , à la même fréquence que le courant. Le nombre φ est le déphasage de la tension par rapport au courant : u est en avance de $\varphi \approx 0,93 \text{ rad}$ sur i . On constate que $5 = 10 \times 0,5 = |\underline{Z}| \times I_{\max}$ et que φ est l'argument de $\underline{Z}$: le module de l'impédance donne le rapport des amplitudes, son argument donne le déphasage.

- 4) $p(t) = (3 \cos(\omega t) - 4 \sin(\omega t)) \times 0,5 \cos(\omega t) = 1,5 \cos^2(\omega t) - 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$.

Linéarisation : $\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$; duplication : $2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \sin(2\omega t)$. Donc

$$p(t) = 1,5 \times \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} - \sin(2\omega t) = \boxed{0,75 + 0,75 \cos(2\omega t) - \sin(2\omega t)}.$$

- 5) a. Primitives de $f(at)$: une primitive de p est

$$\boxed{\Pi(t) = 0,75 t + \frac{0,75}{2\omega} \sin(2\omega t) + \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t)}.$$

- b. $2\omega T = 2 \times 2\pi = 4\pi$, donc $\sin(2\omega T) = \sin(0) = 0$ et $\cos(2\omega T) = \cos(0) = 1$:

$$\int_0^T p(t) dt = \Pi(T) - \Pi(0) = 0,75 T + 0 + \frac{1}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} = 0,75 T,$$

d'où $P = \frac{0,75 T}{T} = \boxed{0,75 \text{ W}}$.

- c. $R I_{\text{eff}}^2 = 6 \times \frac{0,25}{2} = 0,75 \text{ W}$: c'est bien la valeur trouvée.

Phrase attendue : les termes en $\cos(2\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$ ont une valeur moyenne nulle sur une période, donc ils ne contribuent pas à la puissance moyenne : la bobine idéale stocke et restitue de l'énergie à chaque période, sans en consommer ; toute la puissance moyenne est dissipée par la résistance.

Exercice 3 : Le pompage d'une enceinte à vide

6 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1,5 pt; 3) 1,5 pt; 4) 1 pt; 5) 1 pt.

- 1) La vitesse de variation de la pression à l'instant t , c'est-à-dire la dérivée $p'(t)$, est la somme de deux contributions : la pompe fait baisser la pression à la vitesse de $0,6 p(t)$ hPa par minute (contribution $-0,6 p(t)$) et la fuite la fait monter à la vitesse de $0,3$ hPa par minute (contribution $+0,3$). Donc $p'(t) = -0,6 p(t) + 0,3$: p est solution de (E).

- 2) a. (E) est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0,6$ et $b = 0,3$; $-\frac{b}{a} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$. Les solutions sont les fonctions $y(t) = Ke^{-0,6t} + 0,5$, $K \in \mathbb{R}$.

b. $p(0) = 1\,000 \iff K + 0,5 = 1\,000 \iff K = 999,5$, donc $p(t) = 0,5 + 999,5 e^{-0,6t}$.

- 3) a. $p(5) = 0,5 + 999,5 e^{-3} \approx 50,3$ hPa.

b. $p(t) \leq 10 \iff 999,5 e^{-0,6t} \leq 9,5 \iff e^{-0,6t} \leq \frac{9,5}{999,5} \iff -0,6t \leq \ln\left(\frac{9,5}{999,5}\right) \iff t \geq \frac{1}{0,6} \ln\left(\frac{999,5}{9,5}\right)$.

Les tests peuvent commencer à partir de $t_0 = \frac{\ln(999,5/9,5)}{0,6} \approx 7,8$ min.

- 4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,6t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0,5$.

Réponse rédigée : la pression diminue vers $0,5$ hPa sans jamais l'atteindre : c'est la pression limite de l'installation, imposée par la fuite. Pour descendre plus bas, il faudrait réduire la fuite (ou utiliser une pompe plus puissante), et non pomper plus longtemps.

- 5) Sans fuite, $p(t) = 1\,000 e^{-0,6t}$ (solution de $y' = -0,6y$ avec $p(0) = 1\,000$). La pression est divisée par deux lorsque $e^{-0,6t} = \frac{1}{2}$, soit $t = \frac{\ln(2)}{0,6} \approx 1,16$ min, c'est-à-dire environ 69 s : l'affirmation « 70 secondes environ » est exacte.

Phrase attendue : partant d'une pression p_1 à l'instant t_1 , on a $p(t_1 + d) = p_1 e^{-0,6d}$, et la condition $p(t_1 + d) = \frac{p_1}{2}$ donne $e^{-0,6d} = \frac{1}{2}$: la pression de départ p_1 se simplifie, la durée $d = \frac{\ln 2}{0,6}$ est la même à chaque division par deux.

Maîtrise de la langue

2 points

Les deux points sont attribués par une appréciation globale de l'ensemble des réponses rédigées de la copie, en particulier des phrases d'interprétation et de conclusion demandées (exercice 2, questions 3b et 5c; exercice 3, questions 1, 4 et 5). Grille de référence : annexe « Attendus et observables rédactionnels » de la note de service du 11-9-2026 (BO spécial n° 4 du 17 septembre 2026), résumée ci-dessous.

	Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
Orthographe	Erreurs très fréquentes, y compris sur des règles simples (accords sujet-verbe, accords dans le groupe nominal).	Erreurs fréquentes ou répétées (accords, conjugaison, homophones).	Erreurs ponctuelles, qui ne se répètent pas de façon systématique.	Orthographe maîtrisée; erreurs rares et isolées.
Syntaxe, construction des phrases	Nombreuses phrases mal construites ou incompréhensibles; ponctuation inopérante.	Construction fragile, maladresses récurrentes, phrases parfois mal structurées.	Phrases globalement bien construites malgré quelques maladresses ponctuelles.	Phrases correctement construites, syntaxe maîtrisée, voire riche (subordination, coordination).
Lexique	Lexique, notamment scientifique, très pauvre ou employé à mauvais escient.	Lexique pauvre et parfois employé à mauvais escient.	Lexique, notamment scientifique, globalement correct.	Lexique riche et correctement utilisé.
Mise en forme et organisation de la réflexion	Le propos n'est pas organisé.	Le propos est organisé de manière peu pertinente.	Le propos est organisé de manière globalement cohérente.	Le propos est cohérent et suit un fil conducteur perceptible et pertinent.

Conversion en points (proposition de la fabrique, non officielle). La note de service ne fixe pas de barème chiffré pour ces paliers. On propose de retenir le palier dominant sur les quatre dimensions :

Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
0 point	0,5 point	1,5 point	2 points

Les mathématiques comptent pour leur part : une phrase juste et bien écrite qui conclut un calcul faux n'apporte rien sur les dix-huit points de mathématiques, mais elle compte pour la maîtrise de la langue. À l'inverse, des résultats exacts alignés sans aucune phrase ne permettent pas d'atteindre le palier « satisfaisant ».