



Calculatrice autorisée (mode examen)

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement. Barème rapporté sur 20 : 18 points de mathématiques et 2 points de maîtrise de la langue. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 et la maîtrise de la langue pour 2 points sur l'ensemble de l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.

Exercice 1 : Complexes, oscillations et logarithme

5 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres. Le nombre complexe i a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Question 1

On considère le nombre complexe $z = 3 - 3i$.

- Déterminer le module et un argument de z , puis écrire z sous forme exponentielle.
- En déduire la forme exponentielle de z^2 , puis sa forme algébrique. Vérifier ce résultat en développant $(3 - 3i)^2$.

Question 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 4 \cos(3t) - 2 \sin(3t)$.

- Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$.
- On cherche à écrire $g(t)$ sous la forme $A \cos(3t + \varphi)$ avec $A > 0$. Montrer que $A = 2\sqrt{5}$ et que φ vérifie $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donner une valeur approchée de φ à 10^{-2} près.

Question 3

On considère la fonction k définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = x \ln(x) - x$.

- Montrer que, pour tout $x > 0$, $k'(x) = \ln(x)$.
- En déduire la valeur exacte de $\int_1^e \ln(x) dx$.

Question 4

Dans le plan complexe, on considère la transformation T qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. Préciser la nature de T et ses éléments caractéristiques, puis déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' , image du point A d'affixe 2.

Exercice 2 : Le filtre d'une enceinte acoustique

7 points

Dans cet exercice, les mathématiques et la physique se complètent : les lois de l'électricité donnent la tension, les nombres complexes et la trigonométrie l'interprètent, l'intégrale mesure la puissance.

Dans une enceinte acoustique, le haut-parleur de graves est alimenté à travers une bobine de filtrage. L'ensemble se comporte, pour un signal de fréquence $f = 1\,000$ Hz, comme une résistance $R = 6\,\Omega$ en série avec une bobine idéale d'inductance L . On note $\omega = 2\pi f = 2\,000\pi$ rad/s et on suppose que l'intensité du courant, en ampères, est $i(t) = 0,5 \cos(\omega t)$, t en secondes.

Les lois de l'électricité donnent la tension aux bornes de l'ensemble :

$$u(t) = Ri(t) + L i'(t),$$

où i' est la dérivée de i . On admet que $L\omega = 8\,\Omega$.

- 1) Calculer $i'(t)$, puis montrer que $u(t) = 3 \cos(\omega t) - 4 \sin(\omega t)$.
- 2) En électricité, on note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, pour ne pas le confondre avec l'intensité i . On associe à ce circuit le nombre complexe $\underline{Z} = R + jL\omega = 6 + 8j$, appelé impédance complexe. Calculer le module de $\underline{Z}$ et montrer que son argument φ vérifie $\cos \varphi = 0,6$ et $\sin \varphi = 0,8$. Donner une valeur approchée de φ à 10^{-2} près et écrire $\underline{Z}$ sous forme exponentielle.
- 3)
 - a. À l'aide d'une formule d'addition, montrer que, pour tout réel t , $u(t) = 5 \cos(\omega t + \varphi)$.
 - b. Interpréter les nombres 5 et φ pour le physicien : que représentent-ils pour la tension u par rapport au courant i ? Comparer au module et à l'argument de $\underline{Z}$. Répondre par quelques phrases.
- 4) La puissance instantanée reçue par l'ensemble, en watts, est $p(t) = u(t) \times i(t)$. En utilisant la linéarisation de $\cos^2$ et une formule de duplication, montrer que

$$p(t) = 0,75 + 0,75 \cos(2\omega t) - \sin(2\omega t).$$

- 5)
 - a. Déterminer une primitive de p sur $\mathbb{R}$; on l'exprimera en fonction de ω .
 - b. La période du courant est $T = \frac{2\pi}{\omega} = 10^{-3}$ s. La puissance moyenne (ou puissance active) est la valeur moyenne de p sur $[0; T]$: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$. Calculer P .
 - c. Le physicien sait que seule la résistance consomme de la puissance en moyenne, et que cette puissance vaut $R I_{\text{eff}}^2$ avec $I_{\text{eff}} = \frac{0,5}{\sqrt{2}}$. Vérifier que ce calcul est cohérent avec la question précédente, puis expliquer en une phrase ce que signifie, pour la bobine, le fait que les termes en $\cos(2\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$ aient une valeur moyenne nulle.

Exercice 3 : Le pompage d'une enceinte à vide

6 points

Un laboratoire utilise une enceinte à vide pour tester des composants. Au départ, l'enceinte est à la pression atmosphérique, 1 000 hPa. Une pompe est mise en marche à l'instant $t = 0$; on note $p(t)$ la pression dans l'enceinte, en hectopascals, à l'instant t exprimé en minutes.

Le constructeur indique que la pompe retire le gaz à un rythme proportionnel à la pression : à chaque instant t , elle fait baisser la pression à la vitesse de $0,6 p(t)$ hPa par minute. Une légère fuite fait par ailleurs entrer de l'air, ce qui fait monter la pression à la vitesse constante de 0,3 hPa par minute.

- 1) Expliquer pourquoi, d'après ces indications, la fonction p est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,6y + 0,3.$$

- 2) a. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
b. Montrer que $p(t) = 0,5 + 999,5 e^{-0,6t}$ pour tout $t \geq 0$.
- 3) a. Calculer la pression au bout de 5 minutes, arrondie à 0,1 hPa.
b. Les tests peuvent commencer lorsque la pression est inférieure ou égale à 10 hPa. Déterminer, par le calcul, l'instant à partir duquel c'est le cas ; on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au dixième de minute.
- 4) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. Que peut-on en conclure sur la pression la plus basse que l'on peut espérer dans cette enceinte ? Rédiger la réponse.
- 5) Un technicien affirme : « sans la fuite, la pression serait divisée par deux toutes les 70 secondes environ, quelle que soit la pression de départ ». Sans la fuite, p serait solution de $y' = -0,6y$. Vérifier l'affirmation du technicien par le calcul, puis expliquer, en une phrase, pourquoi la durée obtenue ne dépend pas de la pression de départ.

Maîtrise de la langue

2 points

La qualité de la rédaction, l'orthographe, la syntaxe et la précision du vocabulaire sont évaluées sur l'ensemble de la copie, en particulier dans les réponses rédigées demandées aux exercices 2 et 3.