

Exercice 1 : Composer, résoudre, intégrer

5 points

Barème : question 1 : 1,5 pt; question 2 : 1,5 pt; question 3 : 1 pt; question 4 : 1 pt.

Question 1

a. $f = v \circ u$ avec $u(x) = -x^2 + 2x$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $v(X) = e^X$ (définie sur $\mathbb{R}$).

b. $u'(x) = -2x + 2$ et $v'(X) = e^X$. D'après $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$:

$$f'(x) = (-2x + 2)e^{-x^2+2x} = (2 - 2x)e^{-x^2+2x}.$$

Comme $e^{-x^2+2x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2 - 2x$: positif pour $x \leq 1$, négatif pour $x \geq 1$. Le maximum vaut $f(1) = e^{-1+2} = e$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		e	

Question 2

a. $3e^{0,4x} - 5 = 10 \iff e^{0,4x} = 5 \iff 0,4x = \ln(5) \iff x = \frac{\ln(5)}{0,4} = 2,5 \ln(5)$.

La solution est $x = 2,5 \ln(5) \approx 4,02$.

b. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^{\ln(x)} = x$: pour $x > 0$, $\ln(x) > 2 \iff x > e^2$. L'ensemble des solutions est $S =]e^2; +\infty[$, avec $e^2 \approx 7,39$.

Question 3

a. Pour $x \in [0; 1]$, $x^2 + x + 1 > 0$. Avec $w(x) = x^2 + x + 1$, $G = \ln(w)$ et $G'(x) = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = g(x)$: G est une primitive de g .

b. $\int_0^1 g(x) dx = G(1) - G(0) = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) (\approx 1,10)$.

Question 4

a. $h(x) = 3xe^{-2x} - e^{-2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ (car $-2x \rightarrow +\infty$), donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

b. $h = uv$ avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^{-2x}$, $v'(x) = -2e^{-2x}$:

$$h'(x) = 3e^{-2x} - 2(3x - 1)e^{-2x} = (3 - 6x + 2)e^{-2x} = (5 - 6x)e^{-2x}.$$

$h'(x)$ a le signe de $5 - 6x$: h est croissante sur $]-\infty ; \frac{5}{6}]$ et décroissante sur $[\frac{5}{6} ; +\infty[$. Le maximum est

$$h\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{2} - 1\right) e^{-5/3} = \boxed{\frac{3}{2} e^{-5/3}} \approx 0,28.$$

Exercice 2 : Le rinçage d'un bain de traitement de surface

7 points

Barème : 1) 1 pt; 2) 1,5 pt; 3) 1 pt; 4) 1 pt; 5) 1 pt; 6) 1,5 pt.

1) a. $m(0) = 2000 \times 50 = 100\,000$ g, soit $\boxed{100 \text{ kg de sel}}$.

b. En une minute, il entre $200 \times 2 = 400$ g de sel et il sort $200 \times c(t)$ g : la masse varie d'environ $400 - 200 c(t)$ grammes. La masse du bain est $m(t) = 2000 c(t)$, donc la concentration varie d'environ $\frac{400 - 200 c(t)}{2000} = 0,2 - 0,1 c(t)$ par minute. Cette variation par unité de temps est la dérivée $c'(t)$: $\boxed{c'(t) = -0,1 c(t) + 0,2}$, c'est-à-dire que c est solution de (E).

2) a. (E) est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0,1$ et $b = 0,2$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto K e^{-0,1t} - \frac{b}{a}$, soit $\boxed{y(t) = K e^{-0,1t} + 2}$, $K \in \mathbb{R}$.

b. $c(0) = 50 \iff K + 2 = 50 \iff K = 48$. Donc $\boxed{c(t) = 2 + 48 e^{-0,1t}}$.

3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$, donc $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 2}$.

Interprétation : 2 g/L est la concentration de l'eau de rinçage : à la longue, le bain prend la composition de l'eau qui le traverse. Pour tout $t \geq 0$, $c(t) - 2 = 48 e^{-0,1t} > 0$, car une exponentielle est strictement positive : on a toujours $c(t) > 2$.

Phrase attendue : la concentration du bain se rapproche autant que l'on veut de celle de l'eau de rinçage (à 0,1 g/L près au bout de $10 \ln(480) \approx 62$ min), mais ne lui devient jamais égale en un temps fini : le bain ne peut pas être plus propre que l'eau qui le rince.

4) $c(t) \leq 5 \iff 48 e^{-0,1t} \leq 3 \iff e^{-0,1t} \leq \frac{1}{16} \iff -0,1t \leq \ln\left(\frac{1}{16}\right) \iff t \geq 10 \ln(16)$ (la fonction $\ln$ est croissante, et on divise par $-0,1 < 0$). Or $10 \ln(16) \approx 27,7$: le bain est rincé au bout de $\boxed{28 \text{ minutes}}$.

5) $c'(t) = -4,8 e^{-0,1t}$, donc $c'(0) = -4,8$ et $c(0) = 50$: la tangente a pour équation $\boxed{y = -4,8t + 50}$. Elle atteint 2 lorsque $-4,8t + 50 = 2$, soit $\boxed{t = 10 \text{ min}}$.

Commentaire : si le rinçage gardait sa vitesse initiale, le bain serait à 2 g/L en 10 min ; en réalité la vitesse diminue à mesure que la concentration baisse, et il faut 28 min pour atteindre seulement 5 g/L. Le nombre $10 = \frac{1}{0,1}$ est la constante de temps du rinçage.

6) a. Une primitive de $t \mapsto 2 + 48 e^{-0,1t}$ est $t \mapsto 2t - 480 e^{-0,1t}$. Donc

$$\begin{aligned} M &= 200 \left[2t - 480 e^{-0,1t} \right]_0^{30} = 200 (60 - 480 e^{-3} + 480) \\ &= \boxed{200 (540 - 480 e^{-3}) = 108\,000 - 96\,000 e^{-3}}. \end{aligned}$$

Soit $M \approx 103\,220$ g, c'est-à-dire $\boxed{M \approx 103 \text{ kg}}$.

- b. *Bilan rédigé* : le bain contenait 100 kg de sel au départ. En 30 minutes, il est entré $30 \times 400 = 12\,000$ g, soit 12 kg. À $t = 30$, il reste dans le bain $2\,000 \times c(30) = 2\,000(2 + 48e^{-3}) = 4\,000 + 96\,000e^{-3} \approx 8\,780$ g, soit environ 8,8 kg. La masse évacuée est donc

$$100\,000 + 12\,000 - (4\,000 + 96\,000e^{-3}) = 108\,000 - 96\,000e^{-3} \text{ g,}$$

exactement la valeur de M : $100 + 12 - 8,78 \approx \boxed{103,2 \text{ kg}}$. Le bilan de masse et l'intégrale donnent le même résultat, ce qui est attendu puisque l'intégrale du débit de sel sortant est précisément la masse sortie.

Exercice 3 : Le profil d'un ralentisseur

6 points

Barème : 1) 2 pts; 2) 1 pt; 3) 1,5 pt; 4) 0,5 pt; 5) 1 pt.

- 1) a. $h(0) = 0,05(1 - \cos 0) = \boxed{0}$; $h(2) = 0,05(1 - \cos \pi) = 0,05 \times 2 = \boxed{0,1}$; $h(4) = 0,05(1 - \cos 2\pi) = \boxed{0}$.

- b. $h = 0,05(1 - \cos(u))$ avec $u(x) = \frac{\pi x}{2}$ et $u'(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $(\cos u)' = -u' \sin u$:

$$h'(x) = 0,05 \times \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \boxed{0,025 \pi \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

- c. Pour $x \in [0; 2]$, $\frac{\pi x}{2} \in [0; \pi]$ et $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq 0$; pour $x \in [2; 4]$, $\frac{\pi x}{2} \in [\pi; 2\pi]$ et le sinus est négatif. Donc h est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 4]$.

x	0	2	4		
$h'(x)$	0	+	0	-	0
h	<pre> graph LR A[0] --> B[0,1] B --> C[0] </pre>				

La hauteur maximale est 0,1 m = 10 cm : le profil est conforme (la limite est atteinte, non dépassée).

- 2) Une primitive de $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est $x \mapsto \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ (primitive de $f(ax + b)$ avec $a = \frac{\pi}{2}$). Donc

$$\boxed{H(x) = 0,05x - \frac{0,1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

- 3) a. $\int_0^4 h(x) dx = H(4) - H(0) = 0,2 - \frac{0,1}{\pi} \sin(2\pi) - 0 = \boxed{0,2}$.

Comme $h \geq 0$, c'est l'aire, en m^2 , de la partie grisée : la section du ralentisseur.

- b. Volume = $0,2 \times 6 = \boxed{1,2 \text{ m}^3}$; masse = $1,2 \times 2,4 = \boxed{2,88 \text{ t}}$.

4) Valeur moyenne : $\frac{1}{4-0} \int_0^4 h(x) dx = \frac{0,2}{4} = \boxed{0,05 \text{ m}}$.

Phrase attendue : un ralentisseur rectangulaire de même longueur (4 m) et de hauteur constante 5 cm aurait exactement la même section, donc le même volume d'enrobé.

5) Comme $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1$, on a pour tout x : $h'(x) \leq 0,025\pi \approx 0,0785$, valeur atteinte en $x = 1$. La pente maximale est d'environ $7,9\% < 10\%$: la contrainte est respectée.

Maîtrise de la langue

2 points

Les deux points sont attribués par une appréciation globale de l'ensemble des réponses rédigées de la copie, en particulier des phrases d'interprétation et de conclusion demandées (exercice 2, questions 3, 5 et 6b; exercice 3, questions 1c, 4 et 5). Grille de référence : annexe « Attendus et observables rédactionnels » de la note de service du 11-9-2026 (BO spécial n° 4 du 17 septembre 2026), résumée ci-dessous.

	Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
Orthographe	Erreurs très fréquentes, y compris sur des règles simples (accords sujet-verbe, accords dans le groupe nominal).	Erreurs fréquentes ou répétées (accords, conjugaison, homophones).	Erreurs ponctuelles, qui ne se répètent pas de façon systématique.	Orthographe maîtrisée; erreurs rares et isolées.
Syntaxe, construction des phrases	Nombreuses phrases mal construites ou incompréhensibles; ponctuation inopérante.	Construction fragile, maladroites récurrentes, phrases parfois mal structurées.	Phrases globalement bien construites malgré quelques maladroites ponctuelles.	Phrases correctement construites, syntaxe maîtrisée, voire riche (subordination, coordination).
Lexique	Lexique, notamment scientifique, très pauvre ou employé à mauvais escient.	Lexique pauvre et parfois employé à mauvais escient.	Lexique, notamment scientifique, globalement correct.	Lexique riche et correctement utilisé.
Mise en forme et organisation de la réflexion	Le propos n'est pas organisé.	Le propos est organisé de manière peu pertinente.	Le propos est organisé de manière globalement cohérente.	Le propos est cohérent et suit un fil conducteur perceptible et pertinent.

Conversion en points (proposition de la fabrique, non officielle). La note de service ne fixe pas de barème chiffré pour ces paliers. On propose de retenir le palier dominant sur les quatre dimensions :

Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
0 point	0,5 point	1,5 point	2 points

Les mathématiques comptent pour leur part : une phrase juste et bien écrite qui conclut un calcul faux n'apporte rien sur les dix-huit points de mathématiques, mais elle compte pour la maîtrise de la langue. À l'inverse, des résultats exacts alignés sans aucune phrase ne permettent pas d'atteindre le palier « satisfaisant ».