



Calculatrice autorisée (mode examen)

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Les réponses doivent être justifiées; les questions qui demandent une interprétation ou une conclusion appellent une réponse rédigée en phrases.

Entraînement à la **partie mathématiques** de l'épreuve de spécialité physique-chimie et mathématiques (session 2027) : le programme de **spécialité** seulement. Barème rapporté sur 20 : 18 points de mathématiques et 2 points de maîtrise de la langue. Au bac, les mathématiques comptent pour 5,5 points sur 20 et la maîtrise de la langue pour 2 points sur l'ensemble de l'épreuve de 3 h, commune avec la physique-chimie : rédigez vos justifications et vos conclusions en phrases correctes.

Exercice 1 : Composer, résoudre, intégrer

5 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

- Écrire f sous la forme $v \circ u$, en précisant les fonctions u et v .
- En déduire que, pour tout réel x , $f'(x) = (2 - 2x)e^{-x^2+2x}$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (on y fera figurer la valeur exacte du maximum; les limites ne sont pas demandées).

Question 2

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^{0,4x} - 5 = 10$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x) > 2$.

Question 3

On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

- Vérifier que la fonction G définie sur $[0; 1]$ par $G(x) = \ln(x^2+x+1)$ est une primitive de g .
- En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 g(x) dx$.

Question 4

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x-1)e^{-2x}$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
- Montrer que, pour tout réel x , $h'(x) = (5-6x)e^{-2x}$, puis en déduire la valeur exacte du maximum de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Le rinçage d'un bain de traitement de surface

7 points

Dans cet exercice, les mathématiques et la physique-chimie se complètent : le bilan de matière fournit l'équation, les mathématiques la résolvent.

Dans un atelier de traitement de surface, un bain de 2 000 litres contient une solution d'un sel métallique à la concentration massique de 50 g/L. Pour le rincer, on fait entrer en continu de l'eau de rinçage avec un débit de 200 L/min, et le trop-plein évacue la solution avec le même débit, de sorte que le volume du bain reste égal à 2 000 L. L'eau de rinçage provient d'un circuit de récupération : elle contient déjà le sel à la concentration de 2 g/L. On suppose le bain agité, donc de concentration uniforme.

On note $c(t)$ la concentration massique du bain, en g/L, à l'instant t exprimé en minutes. On a donc $c(0) = 50$.

- 1)
 - a. Calculer la masse de sel présente dans le bain à l'instant $t = 0$.
 - b. Pendant une minute, il entre 200 L d'eau à 2 g/L et il sort 200 L de solution à la concentration $c(t)$. On admet que la variation de c pendant une minute est approximativement égale à $c'(t)$. Justifier que la masse de sel du bain varie alors d'environ $400 - 200 c(t)$ grammes, puis que c est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,1 y + 0,2.$$

- 2)
 - a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
 - b. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $c(t) = 2 + 48 e^{-0,1t}$.
- 3) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ et interpréter cette valeur dans le contexte du rinçage. La concentration du bain peut-elle, à un instant donné, devenir égale à celle de l'eau de rinçage ? Justifier, puis répondre par une phrase.
- 4) Le bain est considéré comme rincé lorsque sa concentration est inférieure ou égale à 5 g/L. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de minutes entières le bain est rincé.
- 5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de c au point d'abscisse 0, puis l'instant où cette tangente atteint la valeur 2. Comparer cet instant au résultat de la question 4 et commenter.
- 6)
 - a. Le trop-plein évacue 200 L de solution par minute. La masse de sel évacuée pendant les 30 premières minutes, en grammes, est $M = \int_0^{30} 200 c(t) dt$. Calculer la valeur exacte de M , puis une valeur approchée au kilogramme près.
 - b. Retrouver ce résultat par un bilan de masse : masse initiale, masse entrée en 30 minutes, masse restante dans le bain à $t = 30$. Rédiger ce bilan en quelques lignes.

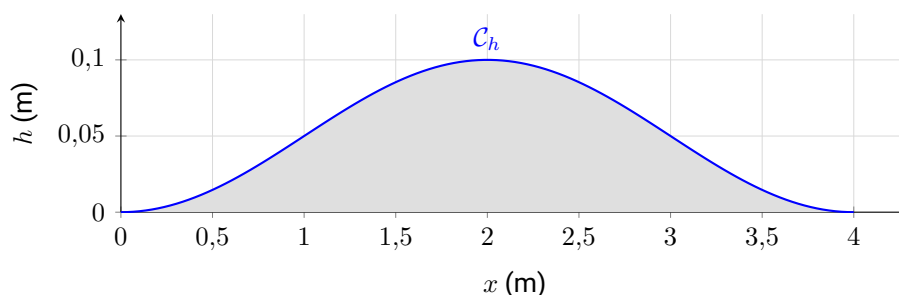
Exercice 3 : Le profil d'un ralentisseur

6 points

Une commune fait poser un ralentisseur sur une rue en zone 30. Vu en coupe, son profil est modélisé par la courbe de la fonction h définie sur $[0 ; 4]$ par

$$h(x) = 0,05 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right),$$

où x est la distance horizontale et $h(x)$ la hauteur, toutes deux en mètres. Le ralentisseur occupe toute la largeur de la chaussée, soit 6 mètres.



- 1)
 - a. Calculer $h(0)$, $h(2)$ et $h(4)$.
 - b. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 4]$, $h'(x) = 0,025 \pi \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right)$.
 - c. En déduire le tableau de variations de h sur $[0 ; 4]$. La réglementation limite la hauteur d'un ralentisseur à 10 cm : ce profil est-il conforme ?
- 2) Déterminer une primitive H de h sur $[0 ; 4]$.
- 3)
 - a. Calculer $\int_0^4 h(x) dx$ et interpréter ce nombre sur la figure.
 - b. En déduire le volume d'enrobé nécessaire, en m^3 , puis sa masse en tonnes sachant que l'enrobé a une masse volumique de $2,4 \text{ t/m}^3$.
- 4) Calculer la valeur moyenne de h sur $[0 ; 4]$ et expliquer, par une phrase, ce que représente ce nombre pour le ralentisseur.
- 5) La réglementation impose aussi que la pente du profil ne dépasse 10 % en aucun point, c'est-à-dire que $h'(x) \leq 0,1$ pour tout $x \in [0 ; 4]$. Le profil respecte-t-il cette contrainte ? Justifier.

Maîtrise de la langue

2 points

La qualité de la rédaction, l'orthographe, la syntaxe et la précision du vocabulaire sont évaluées sur l'ensemble de la copie, en particulier dans les réponses rédigées demandées aux exercices 2 et 3.