

Exercice 1 – Le logo d'un salon de thé (vrai ou faux)

6 points

Affirmations a et e : 1,5 pt chacune ; affirmations b, c et d : 1 pt chacune, justification comprise.

- a. **FAUX** Les cinq sommets partagent le tour complet en cinq angles au centre égaux : $\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72^\circ$. Le triangle OAB est isocèle en O ($OA = OB = 5$ cm), donc ses angles à la base valent $\frac{180 - 72}{2} = 54^\circ$. L'angle intérieur $\widehat{ABC}$ est formé des deux angles à la base $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OBC}$: $\widehat{ABC} = 2 \times 54 = 108^\circ$, et non 100° .
- b. **VRAI** Cinq rotations successives de même centre O et d'angle 72° équivalent à une rotation d'angle $5 \times 72 = 360^\circ$, c'est-à-dire un tour complet : chaque point revient à sa place, le logo est inchangé. (Une seule rotation envoie A sur B , B sur C , etc. : le cercle et le pentagone sont invariants dès la première, mais les segments $[OA]$ et $[OB]$ deviennent $[OB]$ et $[OC]$; c'est donc bien le tour complet qui redonne le logo entier, segments compris. Que l'on considère le logo avec ou sans ses deux segments, l'affirmation est vraie.)
- c. **VRAI** Un polygone régulier à n côtés possède n axes de symétrie. Pour le pentagone ($n = 5$, impair), chaque axe passe par un sommet et par le milieu du côté opposé : par exemple la droite (OA) passe par A et par le milieu de $[CD]$. On obtient cinq axes, et il n'y en a pas d'autre.
- d. **FAUX** En perspective cavalière, la face avant (et toute face parallèle au plan de face) est dessinée en vraie grandeur : les longueurs et les angles y sont conservés. Un cercle de la face avant est donc représenté par un cercle de même rayon. Seuls les cercles tracés sur les faces fuyantes (dessus, côté) deviennent des ellipses.
- e. **FAUX** Contre-exemple : une frise formée de carrés identiques répétés par translation (ou de triangles isocèles posés sur leur base). La droite verticale passant par le milieu de n'importe quel carré est un axe de symétrie de la frise. Une frise construite par translation peut donc très bien avoir des axes de symétrie.

Exercice 2 – Le vase coupé en biais

7 points

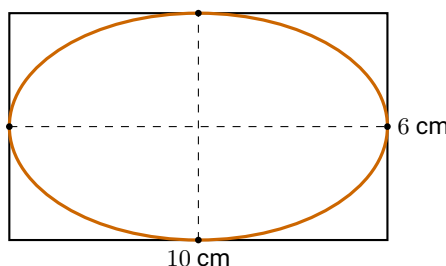
- 1) Un plan perpendiculaire à l'axe d'un cylindre de révolution le coupe selon un **cercle** identique à la base : **rayon 3 cm** (diamètre 6 cm). (1 pt)
- 2) (3,5 pts : 0,5 + 1 + 2)
 - a. Le plan est oblique par rapport à l'axe (ni perpendiculaire, ni parallèle) : la section est une **ellipse**.
 - b. Vue du dessus, l'ouverture se superpose exactement au cercle de base : dans la direction perpendiculaire au plan de la vue de face, l'ellipse a la largeur du cylindre, c'est-à-dire son diamètre $2 \times 3 =$ **6 cm**. Le plan oblique n'allonge la section que dans la direction de la pente.
 - c. Sur la vue de face, le segment orange relie le point de gauche à 6 cm de hauteur au point de

droite à 14 cm de hauteur ; son écart horizontal est le diamètre 6 cm et son écart vertical est $14 - 6 = 8$ cm. Dans le triangle rectangle ainsi formé (pointillés de la figure), le théorème de Pythagore donne : $\text{grand axe}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, donc $\text{grand axe} = \sqrt{100} = 10$ cm. Ce segment est bien le grand axe en vraie grandeur : il est contenu dans le plan vertical qui passe par l'axe du vase et qui est parallèle au plan de la vue de face, donc il n'est pas déformé sur cette vue ; c'est la plus grande dimension de l'ouverture.

3)

(2,5 pts : 1 + 1,5)

- a. Le rectangle a pour dimensions $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ (longueur du grand axe sur longueur du petit axe). L'ellipse est tangente à chaque côté en son milieu : les quatre points de contact sont les extrémités des deux axes, qui sont aussi les milieux des côtés du rectangle.
- b. Construction (ci-dessous, réduite de moitié) : on trace le rectangle 10×6 , ses médianes (les deux axes de l'ellipse, qui se coupent au centre), on marque les milieux des côtés, puis on trace l'ellipse à main levée en l'aplatissant contre chaque côté au point de contact, sans jamais sortir du rectangle.

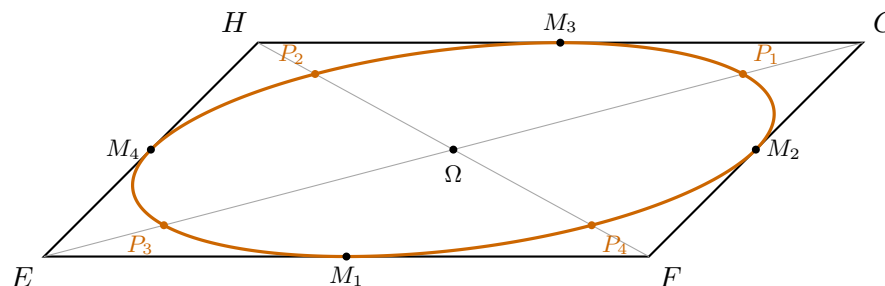


L'ouverture en vraie grandeur (ici à l'échelle 1/2) et son rectangle circonscrit

Exercice 3 – Le médaillon sur le coffret

3 points

- 1) Dans la réalité, le cercle est tangent à chaque côté du carré en son milieu. La perspective cavalière est une projection parallèle : elle **conserve les milieux** (le milieu d'un côté est représenté par le milieu du segment image) et **conserve les contacts** (un point commun au cercle et au côté reste un point commun à leurs images). L'image du cercle touche donc chaque côté du parallélogramme $EFGH$ en son milieu. (1 pt)
- 2) Une projection parallèle **conserve les rapports de longueurs sur une même droite** : le point situé aux $\frac{7}{10}$ de la demi-diagonale $[\Omega G]$ à partir de Ω est représenté par le point situé aux $\frac{7}{10}$ du segment image $[\Omega G]$, et de même pour les trois autres demi-diagonales. (2 pts)
Construction sur la figure 2 (face $EFGH$ seule, côté $[EF]$ de 8 cm) : les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ sont tracées, leur intersection est Ω . On place les milieux M_1, M_2, M_3, M_4 des côtés, puis les quatre points P_1 à P_4 aux $\frac{7}{10}$ de chaque demi-diagonale à partir de Ω . On relie les huit points par une courbe lisse, tangente aux côtés aux quatre milieux : c'est une ellipse (image d'un cercle par une projection parallèle).



Le médaillon sur la face EFGH : les quatre milieux (noirs) et les quatre points des diagonales (orange).

Remarque : sur ce dessin, l'ellipse a pour paramétrage $x = 5,414 + 4 \cos t + 1,414 \sin t$, $y = 1,414 + 1,414 \sin t$ (repère d'origine E, en cm); les points P_i sont exactement aux $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des demi-diagonales (soit environ 0,71).

Exercice 4 – Le pictogramme à l'angle arrondi (question ouverte)

4 points

Barème indicatif : position du centre justifiée par la tangence 1,5 pt; rayon 0,5 pt; tracé 1 pt; longueur exacte 1 pt.

Centre et rayon. Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de contact.

- La droite (AB), horizontale, doit être tangente au cercle en B : le rayon $[\Omega B]$ est donc perpendiculaire à (AB), c'est-à-dire vertical. Le centre Ω est sur la verticale passant par B(6 ; 0) : son abscisse est 6.
- La droite (CD), verticale, doit être tangente au cercle en C : le rayon $[\Omega C]$ est horizontal. Le centre Ω est sur l'horizontale passant par C(10 ; 4) : son ordonnée est 4.

Donc $\Omega(6 ; 4)$. Le rayon est $\Omega B = 4 - 0 = 4$ et aussi $\Omega C = 10 - 6 = 4$: les deux valeurs coïncident, le raccordement est possible avec un rayon de 4 cm. L'arc est un quart de cercle (l'angle $\widehat{B\Omega C}$ est droit).

Longueur du tracé. $AB = 6$ cm et $CD = 10 - 4 = 6$ cm. L'arc est un quart du cercle de rayon 4 : $\frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$ cm. Longueur totale : $6 + 2\pi + 6 = 12 + 2\pi$ cm (un peu plus de 18 cm).

Le pictogramme est formé de deux segments de 6 cm reliés par un quart de cercle de centre $\Omega(6 ; 4)$ et de rayon 4 cm ; sa longueur totale est $12 + 2\pi$ cm.

