

Automatismes

4 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Pour comprendre
1	3,301	$\log(2\,000) = \log(2 \times 10^3) = \log(2) + 3$.
2	-7 et 7	$49 > 0$: deux solutions opposées, $\sqrt{49}$ et $-\sqrt{49}$.
3	$I = \frac{P}{U}$	On divise les deux membres par U (non nul).
4	$(2x - 3)(2x + 3)$	$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$, puis $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
5	$x = 0,25$	Deux nombres inverses : $x = \frac{1}{4}$.
6	618 €	$600 \times 1,03 = 618$.
7	$x < 6$	$2x < 12$, puis on divise par $2 > 0$.
8	$] - 5; 2[$	Racines -5 et 2 ; coefficient de x^2 positif (1) : le produit est négatif <i>entre</i> les racines, bornes exclues.

Exercice 1 – Moins d'espèces à la caisse

7 points

Partie A – Quatre années de baisse

1) $\frac{45 - 62}{62} = -\frac{17}{62} \approx -0,274$: la part a évolué de $-27,4\%$ entre 2020 et 2024. (0,5 pt)

2) Si t est le taux annuel moyen, quatre évolutions au taux t donnent le même coefficient global : (1,5 pt)

$$(1 + t)^4 = \frac{45}{62} \iff 1 + t = \left(\frac{45}{62}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,9230 \iff t \approx -0,0770.$$

(Avec le logarithme : $\log(1 + t) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{45}{62}\right)$, d'où $1 + t = 10^{\frac{1}{4} \log(45/62)}$.)

Le taux d'évolution annuel moyen est d'environ $-7,70\%$: la part des espèces a baissé en moyenne de 7,70 % par an.

Partie B – Une prévision

3) Baisser de 8 % revient à multiplier par 0,92 : pour tout n , $v(n + 1) = 0,92 \times v(n)$. La suite $(v(n))$ est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v(0) = 45$, donc $v(n) = 45 \times 0,92^n$. (1 pt)

4) La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: elle conserve l'ordre. (2 pts)

$$45 \times 0,92^n < 20 \iff 0,92^n < \frac{4}{9} \iff n \log(0,92) < \log\left(\frac{4}{9}\right) \iff n > \frac{\log(4/9)}{\log(0,92)},$$

car $\log(0,92) < 0$ (puisque $0,92 < 1$) : diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.
 $\frac{\log(4/9)}{\log(0,92)} \approx 9,73$; le plus petit entier qui convient est $n = 10$. Contrôle : $v(9) \approx 21,2$ et $v(10) \approx$

19,5.

Selon cette prévision, la part des espèces passera sous 20 % en 2034, année où le commerçant pourra supprimer sa caisse à espèces.

- 5) Diviser par deux revient à multiplier par 0,5. Or $0,92^8 \approx 0,513 > 0,5$: en huit ans, la part n'est multipliée que par 0,513 environ ($v(8) \approx 23,1\% > 22,5\%$). (1 pt)

Le commerçant a tort, de peu : la part des espèces n'est pas encore divisée par deux au bout de huit ans ; il en faut neuf ($0,92^9 \approx 0,472 < 0,5$).

- 6) Pour tout n , $0,92^n > 0$, donc $v(n) > 0$: selon ce modèle, la part des espèces ne devient jamais nulle, elle se rapproche de 0 sans l'atteindre. (1 pt)

Une baisse de 8 % par an pendant des dizaines d'années n'est qu'une hypothèse : les habitudes des clients, la réglementation ou les innovations de paiement peuvent la modifier, et la prévision devient de moins en moins fiable à mesure qu'on s'éloigne de 2024.

Exercice 2 — Le sorbet maison d'un restaurant

6 points

- 1) $C(5) = 1 + 3 + 9 = \boxed{13 \text{ €}}$ et $C(30) = 6 + 3 + 1,5 = \boxed{10,50 \text{ €}}$. (1 pt)

Quand le glacier fabrique très peu de sorbet, les 45 € de frais fixes sont répartis sur très peu de litres : $\frac{45}{x}$ devient très grand lorsque x est proche de 0 (par exemple 45 € par litre pour $x = 1$), ce qui fait grimper le coût moyen.

- 2) $C(x) = 0,2x + 3 + 45 \times \frac{1}{x}$ et la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$: (1,5 pt)

$$\boxed{C'(x) = 0,2 - \frac{45}{x^2}} = \frac{0,2x^2 - 45}{x^2} = \frac{0,2(x^2 - 225)}{x^2} = \frac{0,2(x - 15)(x + 15)}{x^2}.$$

- 3) Sur $[1 ; 40]$: $0,2 > 0$, $x + 15 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $C'(x)$ a le signe de $x - 15$. (1,5 pt)

x	1	15	40
$C'(x)$	−	0	+
C	48,2	9	12,125

$C(15) = 3 + 3 + 3 = 9$. Le coût moyen minimal est de 9 € par litre, atteint pour une fabrication de 15 litres par jour.

- 4) $\frac{0,2(x - 9)(x - 25)}{x} = \frac{0,2(x^2 - 34x + 225)}{x} = 0,2x - 6,8 + \frac{45}{x}$, et $C(x) - 9,8 = 0,2x + 3 - 9,8 + \frac{45}{x} = 0,2x - 6,8 + \frac{45}{x}$: l'égalité est vérifiée. (1,5 pt + 0,5 pt)

Sur $[1 ; 40]$, $0,2 > 0$ et $x > 0$: $C(x) - 9,8$ a le signe de $(x - 9)(x - 25)$.

x	1	9	25	40
$x - 9$	−	0	+	+
$x - 25$	−	−	0	+
$C(x) - 9,8$	+	0	−	+

$$C(x) \leq 9,8 \iff x \in [9; 25].$$

Conseil au chef : fabriquer chaque jour entre 9 et 25 litres de sorbet; le coût moyen reste alors inférieur ou égal au prix de vente de 9,80 € le litre (le sorbet n'est pas vendu à perte), et il est le plus bas, 9 €, autour de 15 litres.

Exercice 3 – Un semestre en quatre affirmations (vrai ou faux)

3 points

0,75 point par affirmation : 0,25 pour la réponse, 0,5 pour la justification.

1) **Fausse.** $\log(100x) = \log(100) + \log(x) = 2 + \log(x)$. Contre-exemple : pour $x = 10$, $\log(1\,000) = 3$ alors que $100 \log(10) = 100$.

2) **Vraie.** $g'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 = -\frac{3}{x^2} - 2$, somme de deux nombres strictement négatifs : $g'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc g y est décroissante.

3) **Fausse.** $\sum_{k=0}^9 2 \times 1,5^k = 2 \times \frac{1 - 1,5^{10}}{1 - 1,5} \approx 226,66$, qui ne dépasse pas 250.

4) **Vraie.** $0,5^{-3} = \frac{1}{0,5^3} = \frac{1}{0,125} = 8$: $x = -3$ est solution. C'est la seule, car la fonction $x \mapsto 0,5^x$ est strictement décroissante (on peut aussi écrire $x = \frac{\log(8)}{\log(0,5)} = -3$).