

Devoir commun de mathématiques – Terminale, voie technologique (toutes séries)

Durée : 2 heures Calculatrice autorisée (mode examen)

## Automatismes

4 points

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée : écrire seulement la réponse courte attendue (un nombre, une expression, un intervalle), dans le tableau ou sur la copie en indiquant le numéro de la question. Chaque question vaut 0,5 point.

| N° | Énoncé                                                                                          | Réponse |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1  | On donne $\log(2) \approx 0,301$ . Donner une valeur approchée de $\log(2\,000)$ .              |         |
| 2  | Donner les solutions de l'équation $x^2 = 49$ .                                                 |         |
| 3  | La puissance électrique vérifie $P = U \times I$ . Exprimer $I$ en fonction de $P$ et de $U$ .  |         |
| 4  | Factoriser l'expression $4x^2 - 9$ .                                                            |         |
| 5  | Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = 4$ , d'inconnue $x$ non nulle.                               |         |
| 6  | Un loyer de 600 € augmente de 3 %. Quel est le nouveau loyer ?                                  |         |
| 7  | Résoudre l'inéquation $2x - 7 < 5$ .                                                            |         |
| 8  | Donner, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble des réels $x$ tels que $(x - 2)(x + 5) < 0$ . |         |

## DEUXIÈME PARTIE (16 points)

Cette partie comporte trois exercices indépendants. Les réponses doivent être justifiées ; les questions qui demandent une interprétation appellent une réponse rédigée en phrases.

### Exercice 1 – Moins d'espèces à la caisse

7 points

Une maison de la presse de centre-ville relève chaque année la part de ses ventes réglées en espèces (le reste est payé par carte ou par téléphone). Cette part était de 62 % en 2020 ; elle n'est plus que de 45 % en 2024.

#### Partie A – Quatre années de baisse

- 1) Calculer le taux d'évolution global de cette part entre 2020 et 2024. Donner le résultat en pourcentage, arrondi à 0,1 %.
- 2) Déterminer le taux d'évolution annuel moyen entre 2020 et 2024. Donner le résultat en pourcentage, arrondi à 0,01 %.

### Partie B – Une prévision

À partir de 2024, on suppose que la part des ventes réglées en espèces baisse de 8 % par an. On note  $v(n)$  cette part, en pourcentage,  $n$  années après 2024 :  $v(0) = 45$ .

- 3) Justifier que la suite  $(v(n))$  est géométrique et exprimer  $v(n)$  en fonction de  $n$ .
- 4) Le commerçant veut supprimer sa caisse enregistreuse à espèces dès que cette part sera inférieure à 20 %. Résoudre, à l'aide du logarithme décimal, l'inéquation  $45 \times 0,92^n < 20$  d'inconnue  $n$  entier naturel, puis donner l'année correspondante.
- 5) Le commerçant affirme : « Selon cette prévision, la part des espèces aura été divisée par deux en huit ans. » A-t-il raison ? Justifier.
- 6) Selon ce modèle, la part des paiements en espèces deviendra-t-elle un jour nulle ? Expliquer, par une phrase, ce que cela dit de la fiabilité de cette prévision à très long terme.

### Exercice 2 – Le sorbet maison d'un restaurant

6 points

Le chef glacier d'un restaurant fabrique chaque jour entre 1 et 40 litres de sorbet. Pour  $x$  litres fabriqués,  $x \in [1 ; 40]$ , le coût moyen de fabrication d'un litre, en euros, est

$$C(x) = 0,2x + 3 + \frac{45}{x}.$$

- 1) Calculer  $C(5)$  et  $C(30)$ . Le terme  $\frac{45}{x}$  représente la part, par litre, des 45 € de frais fixes journaliers (machine, énergie). Expliquer pourquoi le coût moyen est élevé lorsque le glacier fabrique très peu de sorbet.
- 2) On admet que  $C$  est dérivable sur  $[1 ; 40]$ . Calculer  $C'(x)$ , puis montrer que, pour tout  $x$  de  $[1 ; 40]$ ,

$$C'(x) = \frac{0,2(x - 15)(x + 15)}{x^2}.$$

- 3) Étudier le signe de  $C'(x)$  sur  $[1 ; 40]$  et dresser le tableau de variations de  $C$ . Quel est le coût moyen minimal, et pour quelle quantité est-il atteint ?
- 4) Le restaurant vend un litre de sorbet 9,80 €. Vérifier que, pour tout  $x$  de  $[1 ; 40]$ ,

$$C(x) - 9,8 = \frac{0,2(x - 9)(x - 25)}{x}.$$

En déduire les quantités fabriquées pour lesquelles le coût moyen ne dépasse pas 9,80 €, puis conseiller le chef par une phrase.

### Exercice 3 – Un semestre en quatre affirmations (vrai ou faux)

3 points

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\log(100x) = 100 \log(x)$ .
- 2) La fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{3}{x} - 2x$  est décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .
- 3) La somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 1,5 dépasse 250.
- 4) L'équation  $0,5^x = 8$ , d'inconnue  $x$  réelle, a pour solution  $x = -3$ .