

Automatismes

4 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Pour comprendre
1	$+15\%$	$\frac{9,20 - 8}{8} = \frac{1,2}{8} = 0,15$.
2	-12%	Coefficient global $0,8 \times 1,1 = 0,88 = 1 - 0,12$.
3	114	$100 \times \frac{57}{50} = 114$: le prix a augmenté de 14 %.
4	$4,2 \times 10^{-4}$	On déplace la virgule de 4 rangs vers la droite pour obtenir un nombre entre 1 et 10.
5	3^{3x}	$a^x \times a^y = a^{x+y}$: $3^{x+2x} = 3^{3x}$.
6	$3x^2 - 12x$	Dérivée de x^3 : $3x^2$; de $-6x^2$: $-12x$; d'une constante : 0.
7	3	$g'(x) = 4x - 1$, donc $g'(1) = 3$.
8	75	$5 + 10 + 20 + 40 = 75$ (ou $5 \times \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 5 \times 15$).

Exercice 1 – L'agrandissement d'une librairie (deux documents)

8 points

- 1) Entre janvier 2020 et janvier 2026, il y a 6 évolutions annuelles, de coefficient multiplicateur global $\frac{32\,000}{28\,400}$. Si t est le taux annuel moyen, $(1+t)^6 = \frac{32\,000}{28\,400}$, donc (1,5 pt)

$$1+t = \left(\frac{32\,000}{28\,400}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,0201 \quad t \approx \boxed{2,0\%}.$$

Entre 2020 et 2026, le coût des travaux a augmenté en moyenne d'environ 2 % par an.

- 2) Augmenter de 2 % revient à multiplier par 1,02 : pour tout entier naturel n , $c(n+1) = 1,02 \times c(n)$. La suite $(c(n))$ est **géométrique de raison** 1,02 et de premier terme $c(0) = 32\,000$, donc $c(n) = 32\,000 \times 1,02^n$. (1,5 pt)

Janvier 2031 correspond à $n = 5$: $c(5) = 32\,000 \times 1,02^5 \approx \boxed{35\,331 \text{ €}}$.

- 3) a. Le versement de janvier 2027 est augmenté de 2,5 % chaque 1^{er} janvier de 2028 à 2031, soit 4 fois : il vaut en janvier 2031 (0,5 pt)

$$6\,000 \times 1,025^4 \approx \boxed{6\,622,88 \text{ €}}.$$

- b. De même, en janvier 2031, le versement de 2028 vaut $6\,000 \times 1,025^3$, celui de 2029 vaut $6\,000 \times 1,025^2$, celui de 2030 vaut $6\,000 \times 1,025$, et celui de 2031, fait juste après l'ajout des intérêts, vaut 6 000. V est la somme de ces cinq valeurs : (2 pts)

$$V = \sum_{k=0}^4 6\,000 \times 1,025^k,$$

somme de $4 - 0 + 1 = \boxed{5}$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme

6 000 et de raison 1,025. Somme des termes d'une suite géométrique : premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

$$V = 6\,000 \times \frac{1 - 1,025^5}{1 - 1,025} \approx \boxed{31\,538 \text{ €}}.$$

- 4) $31\,538 < 35\,331$: la somme placée en janvier 2031 ne suffira pas à payer les travaux ; il manquera environ $35\,331 - 31\,538 = 3\,793 \text{ €}$, alors même que la gérante aura versé 30 000 € et reçu environ 1 538 € d'intérêts. (1 pt)

- 5) Avec un versement annuel v , la somme placée en janvier 2031 vaut $v \times \frac{1 - 1,025^5}{1 - 1,025} \approx 5,2563 v$.
On veut $5,2563 v = 32\,000 \times 1,025^5$:

$$v = \frac{32\,000 \times 1,025^5}{\frac{1 - 1,025^5}{1 - 1,025}} \approx 6\,721,53.$$

Il faudrait verser environ $\boxed{6\,722 \text{ €}}$ chaque année, soit 722 € de plus par an que prévu.

Exercice 2 – La caféine d'un café

5 points

- 1) f est de la forme $t \mapsto k \times a^t$ avec $k = 90 > 0$ et $a = 0,87$, $0 < a < 1$: la fonction $t \mapsto 0,87^t$ est décroissante, et la multiplier par un nombre positif conserve le sens de variation. Donc f est décroissante sur $[0 ; 24]$: la quantité de caféine diminue au fil des heures. (1 pt)

- 2) Valeurs exactes : $f(1) = 90 \times 0,87 = \boxed{78,3}$, $f(2) = 90 \times 0,87^2 = \boxed{68,121}$, $f(3) = 90 \times 0,87^3 = \boxed{59,26527}$.
 $\sqrt{f(1) \times f(3)} = \sqrt{78,3 \times 59,26527} = \sqrt{90^2 \times 0,87^4} = 90 \times 0,87^2 = 68,121 = f(2)$: $f(2)$ est bien la moyenne géométrique de $f(1)$ et $f(3)$ (comme pour trois termes consécutifs d'une suite géométrique).

- 3) Avec la propriété $a^{x+y} = a^x \times a^y$: (1 pt)

$$f(t+5) = 90 \times 0,87^{t+5} = 0,87^5 \times (90 \times 0,87^t) = 0,87^5 \times f(t), \quad 0,87^5 \approx \boxed{0,50}.$$

Toutes les cinq heures, la quantité de caféine dans le sang est environ divisée par deux.

- 4) On trace la droite d'équation $y = 20$: elle coupe la courbe au point d'abscisse $t \approx 10,8$ (entre 10 et 11). Comme f est décroissante, $f(t) < 20$ pour $t > 10,8$ environ. (1 pt)
Le café a été bu à 8 heures et $8 + 10,8 = 18,8$: à l'heure près, la quantité de caféine devient inférieure à 20 mg $\boxed{\text{à partir de 19 heures}}$ (un peu avant, vers 18 h 50).
- 5) Entre 16 heures et 23 heures, il s'écoule 7 heures : $f(7) = 90 \times 0,87^7 \approx \boxed{34 \text{ mg}}$. (1 pt)
Au moment du coucher, il reste encore plus du tiers de la caféine du café ; comme cette quantité ne diminue que de moitié toutes les cinq heures environ, un café pris en fin d'après-midi agit encore au moment de s'endormir, d'où le conseil de l'éviter.

Exercice 3 – Puissances et moyennes (vrai ou faux)

3 points

0,75 point par affirmation : 0,25 pour la réponse, 0,5 pour la justification.

- 1) **Fausse.** D'après $a^{x+y} = a^x \times a^y$: $0,8^{x+1} = 0,8^x \times 0,8 = \boxed{0,8 \times 0,8^x}$. Passer de x à $x+1$ multiplie par 0,8 (baisse de 20 %), cela ne retranche pas 0,2. Contre-exemple : pour $x = 1$, $0,8^2 = 0,64$ alors que $0,8 - 0,2 = 0,6$.
- 2) **Fausse.** $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, qui n'est pas égal à $2 \times 2^x = 2^{x+1}$ en général. Contre-exemple : pour $x = 2$, $4^2 = \boxed{16}$ alors que $2 \times 2^2 = 8$.
- 3) **Fausse.** La moyenne géométrique de 2 et 50 est $\sqrt{2 \times 50} = \sqrt{100} = \boxed{10}$. Le nombre $26 = \frac{2+50}{2}$ est leur moyenne arithmétique.
- 4) **Vraie.** $v(k) = 2 + 3k$, donc $v(20) = 62$. La somme compte $20 - 0 + 1 = 21$ termes ; pour une suite arithmétique :

$$\sum_{k=0}^{20} v(k) = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2} = 21 \times \frac{2 + 62}{2} = 21 \times 32 = \boxed{672}.$$