

Exercice 1 – Six questions flash (réponses courtes)

3 points

N°	Réponse	Pour comprendre
1	$\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$	$\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$; identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
2	$[-1; 4]$	Racines -1 et 4 ; coefficient -3 négatif : l'expression est positive <i>entre</i> les racines (parabole tournée vers le bas), bornes comprises car l'inégalité est large.
3	-4%	Coefficient global $0,8 \times 1,2 = 0,96 = 1 - 0,04$.
4	$\frac{1}{8}$	X suit $\mathcal{B}(3; \frac{1}{2})$; un seul chemin, « face » trois fois : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
5	20	Formule de Pascal : $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10$.
6	20	$E(Y) = n \times 0,25 = 5$, donc $n = \frac{5}{0,25} = 20$.

Exercice 2 – Compter les chemins, puis calculer en fractions

8 points

- 1) Chaque ligne commence et finit par 1; chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (formule de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$). (1,5 pt)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

- 2) $\binom{5}{1}$ est le nombre de chemins de l'arbre à 5 épreuves qui comportent *exactement un* succès (S) et quatre échecs (E). Un tel chemin est entièrement déterminé par la place du succès : SEEEE, ESEEE, EESEE, EEESE, EEEEE. Il y a 5 places possibles, donc $\binom{5}{1} = 5$. (1 pt)

- 3) a. $\{X = 0\}$ correspond au seul chemin EEEEE, et $\{X = 5\}$ au seul chemin SSSSS : (1,5 pt)

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \quad P(X = 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

b. Avec $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$:

(2 pts)

$$P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$$

$$P(X = 2) = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$$

On remarque que $P(X = 1) = P(X = 2)$: un succès ou deux succès sont exactement aussi probables.

c. $\{X \geq 2\}$ est l'événement contraire de $\{X \leq 1\}$, réunion des événements incompatibles $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$:

(1 pt)

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{243 - 112}{243} = \frac{131}{243}$$

4) $E(X) = n \times p = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

(1 pt)

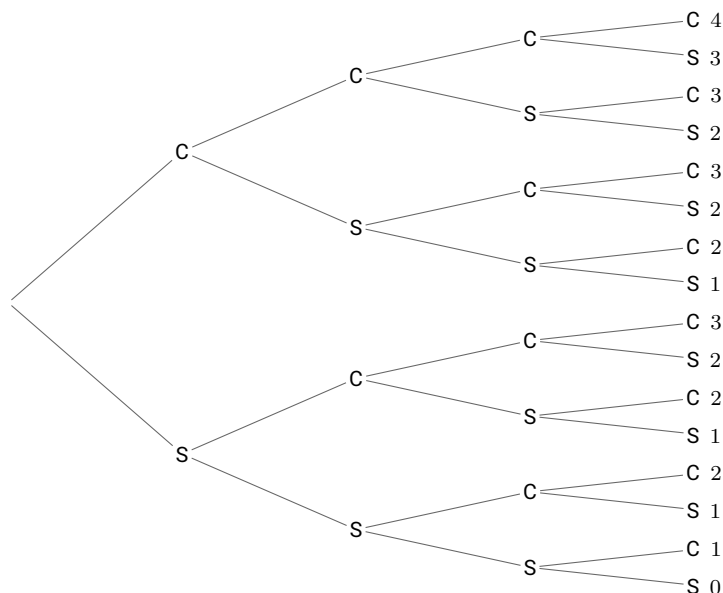
Exercice 3 – Question ouverte : les boîtes de Petri en TP

9 points

Grille indicative : modélisation par une loi binomiale (2 pts); arbre ou dénombrement des chemins (2 pts); calcul de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ (2 pts); probabilité de refaire la série et conclusion sur la première affirmation (2 pts); espérance et conclusion sur la seconde (1 pt).

Modélisation. Pour une boîte, il y a deux issues : contaminée (C), de probabilité $\frac{1}{4}$, ou saine (S), de probabilité $\frac{3}{4}$. Les 4 boîtes d'une série sont des répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Le nombre X de boîtes contaminées d'une série suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(4; \frac{1}{4})$.

Arbre. Au bout de chaque chemin, on note le nombre de boîtes contaminées.



Chaque branche C porte la probabilité $\frac{1}{4}$, chaque branche S la probabilité $\frac{3}{4}$ (non écrites pour alléger la figure). On compte 1 chemin sans boîte contaminée et 4 chemins avec exactement une boîte contaminée (la place de la boîte C), ce que confirme la ligne $n = 4$ du triangle de Pascal, 1 4 6 4 1.

Probabilité de refaire une série.

$$P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \quad P(X = 1) = 4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = \frac{108}{256}$$

La série est à refaire lorsque $X \geq 2$, événement contraire de $\{X \leq 1\}$:

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{81}{256} - \frac{108}{256} = \boxed{\frac{67}{256}}.$$

Or $\frac{1}{4} = \frac{64}{256}$, et $\frac{67}{256} > \frac{64}{256}$.

La première affirmation est fausse, de peu : la probabilité qu'une série soit à refaire vaut $\frac{67}{256}$, un peu plus d'un quart. Sur un grand nombre de séries, un peu plus d'une série sur quatre sera à refaire.

Nombre moyen de boîtes contaminées. $E(X) = n \times p = 4 \times \frac{1}{4} = \boxed{1}$.

La seconde affirmation est vraie : sur un grand nombre de séries, on compte en moyenne une boîte contaminée par série de quatre (ce qui n'empêche pas qu'une série donnée en compte 0, 2 ou plus).