

Exercice 1 – Trois calculs avec la loi $\mathcal{B}(5; 0,2)$
3 points

- 1) Chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui dans la ligne $n = 4$: (1 pt)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \quad (1 + 4 = 5, 4 + 6 = 10, 6 + 4 = 10, 4 + 1 = 5).$$

- 2) $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{4} = 5$, donc : (2 pts)

$$P(X = 2) = 10 \times 0,2^2 \times 0,8^3 = 10 \times 0,04 \times 0,512 = \boxed{0,2048},$$

$$P(X = 4) = 5 \times 0,2^4 \times 0,8 = 5 \times 0,0016 \times 0,8 = \boxed{0,0064}.$$

Exercice 2 – Un spectacle de danse en tournée (deux documents)
7 points

- 1) Pour chaque salle, il y a deux issues : « la soirée affiche complet » (succès), de probabilité 0,7, ou non. Le document 1 indique 8 soirées, qui se remplissent indépendamment les unes des autres, avec la même probabilité : c'est la répétition de 8 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et X compte les succès. (1 pt)

$$X \text{ suit la loi binomiale } \boxed{\mathcal{B}(8; 0,7)}.$$

- 2) Formule de Pascal : chaque coefficient de la ligne $n = 8$ est la somme des deux coefficients situés au-dessus dans la ligne $n = 7$. (1 pt)

$$\binom{8}{6} = \binom{7}{5} + \binom{7}{6} = 21 + 7 = \boxed{28} \quad \binom{8}{7} = \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 7 + 1 = \boxed{8}.$$

- 3) (2 pts)

$$P(X = 6) = 28 \times 0,7^6 \times 0,3^2 \approx \boxed{0,296} \quad P(X = 7) = 8 \times 0,7^7 \times 0,3 \approx \boxed{0,198}$$

$$P(X = 8) = 0,7^8 \approx \boxed{0,058}.$$

Sur le document 2, les bâtons d'abscisses 6, 7 et 8 montent respectivement un peu en dessous de 0,30, un peu en dessous de 0,20 et un peu au-dessus de 0,05 : les valeurs calculées sont cohérentes avec le diagramme.

- 4) Les événements $\{X = 6\}$, $\{X = 7\}$ et $\{X = 8\}$ sont incompatibles : (1,5 pt)

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \approx 0,296475 + 0,197650 + 0,057648 \approx \boxed{0,552}.$$

Cette probabilité dépasse 0,5 : l'annonce A est justifiée, il y a un peu plus d'une chance sur deux d'avoir au moins six soirées complètes.

- 5) $E(X) = n \times p = 8 \times 0,7 = \boxed{5,6}$. (1,5 pt)

L'annonce B n'est pas justifiée : sur un grand nombre de tournées, on compterait en moyenne 5,6 soirées complètes par tournée, ce qui est moins de six.

Sur le document 2, le plus haut bâton est celui de $k = 6$: la valeur la plus probable est $\boxed{6}$. L'espérance n'est pas la valeur la plus probable : c'est une moyenne pondérée de toutes les valeurs possibles, et les valeurs 4 et 5, assez probables, la tirent en dessous de 6 (la loi n'est pas symétrique).

Exercice 3 – Le test de déchiffrement (copie de Sacha)

5 points

1 point par réponse : 0,25 pour le verdict, 0,75 pour la justification ou la correction.

- a. **Correcte.** On répète 4 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve à deux issues (extrait réussi, de probabilité 0,6, ou non); Y compte les réussites : Y suit bien la loi $\mathcal{B}(4; 0,6)$.
- b. **Incorrecte.** Il manque le chemin ERRR. Un chemin réalisant $\{Y = 3\}$ contient exactement un E, qui peut être à l'une des 4 places :

$$\text{ERRR, RERR, RRER, RRRE : } \boxed{4 \text{ chemins}} = \binom{4}{1}.$$

- c. **Incorrecte.** Sacha n'a compté qu'un seul chemin. Chacun des 4 chemins a pour probabilité $0,6^3 \times 0,4 = 0,0864$:

$$P(Y = 3) = 4 \times 0,6^3 \times 0,4 = \boxed{0,3456}.$$

- d. **Incorrecte.** L'événement contraire de $\{Y \geq 1\}$ est $\{Y = 0\}$ (aucun extrait réussi, chemin EEEE), et non $\{Y = 4\}$:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,4^4 = 1 - 0,0256 = \boxed{0,9744}.$$

Sacha a calculé $1 - P(Y = 4)$, c'est-à-dire la probabilité de ne pas réussir les quatre extraits.

- e. **Calcul correct, interprétation incorrecte.** $E(Y) = 4 \times 0,6 = 2,4$ est juste, mais l'élève réussit un nombre entier d'extraits : il ne peut pas en réussir 2,4.
Interprétation attendue : si l'élève passait un grand nombre de fois ce test de déchiffrement, il réussirait en moyenne 2,4 extraits sur 4 par test.

Exercice 4 – Les rappels en fin de concert (Python)

5 points

1) (1,5 pt)

La variable `e` est l'**accumulateur** : elle est initialisée à 0 (ligne `e = 0`), puis, à chaque passage dans la boucle, on lui ajoute le produit `valeurs[k] * probas[k]`, c'est-à-dire une valeur multipliée par sa probabilité. La variable `k` est le compteur : elle prend les valeurs 0, 1, 2, 3 (`range(len(valeurs))`), la liste ayant 4 éléments), puis on sort de la boucle et la fonction renvoie `e`.

La boucle calcule donc la somme $\sum_{k=0}^3 r_k P(R = r_k) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,15$, qui est exactement la définition de $E(R)$.

2)

(1,5 pt)

$$E(R) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,15 = 0 + 0,35 + 0,8 + 0,45 = \boxed{1,6}.$$

La première valeur affichée, 1.6, est bien $E(R) = 1,6$ (l'arrondi à 10^{-4} ne change rien ici).
Sur un grand nombre de concerts, le public réclame en moyenne 1,6 rappel par concert.

- 3) a. La liste `valeurs` contient les entiers de 0 à $n = 4$: $\boxed{[0, 1, 2, 3, 4]}$, les valeurs possibles de X . (0,75 pt)

La deuxième valeur affichée est `probas[0]`, c'est-à-dire $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = 1 \times 0,3^0 \times 0,7^4 = 0,7^4 = \boxed{0,2401},$$

ce qui correspond à l'affichage 0.2401.

- b. La troisième valeur affichée, 1.2, est égale à $4 \times 0,3$: elle illustre la propriété $\boxed{E(X) = n \times p}$ pour une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n; p)$. (0,5 pt)

- c. Il faut modifier la valeur de `n` et la liste des coefficients, qui doit devenir la ligne $n = 10$ du triangle de Pascal (p ne change pas) : (0,75 pt)

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ \text{coeffs} &= [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1] \end{aligned}$$

Le programme affiche alors 3.0, c'est-à-dire $10 \times 0,3 = 3$.