

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Trois calculs avec la loi $\mathcal{B}(5; 0,2)$

3 points

La ligne $n = 4$ du triangle de Pascal est : 1 4 6 4 1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,2)$.

- 1) Écrire la ligne $n = 5$ du triangle de Pascal.
- 2) Calculer la valeur exacte de $P(X = 2)$, puis celle de $P(X = 4)$.

Exercice 2 – Un spectacle de danse en tournée (deux documents)

7 points

Une compagnie de danse contemporaine part en tournée avec un nouveau spectacle.

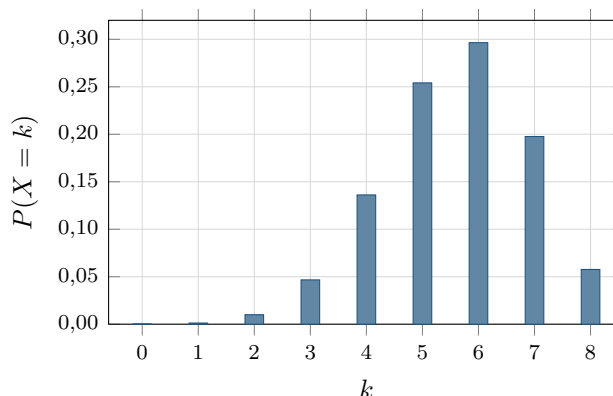
Document 1 – Note de la chargée de diffusion

« Le spectacle sera joué un soir dans chacune de 8 salles différentes. D'après nos tournées précédentes, chaque soirée affiche complet avec une probabilité de 0,7, et les salles se remplissent indépendamment les unes des autres.

Nous pouvons donc annoncer à nos partenaires :

- *annonce A* : il y a plus d'une chance sur deux d'avoir au moins six soirées complètes;
- *annonce B* : en moyenne, une tournée compte plus de six soirées complètes. »

Document 2 – Loi du nombre X de soirées complètes



- 1) À l'aide du document 1, justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) La ligne $n = 7$ du triangle de Pascal est : 1 7 21 35 35 21 7 1. En déduire $\binom{8}{6}$ et $\binom{8}{7}$.
- 3) Calculer $P(X = 6)$, $P(X = 7)$ et $P(X = 8)$. Arrondir à 10^{-3} . Vérifier que ces valeurs sont cohérentes avec le document 2.
- 4) Calculer $P(X \geq 6)$. Arrondir à 10^{-3} . L'annonce A est-elle justifiée?
- 5) Calculer $E(X)$. L'annonce B est-elle justifiée? Lire sur le document 2 la valeur de X la plus probable et expliquer, par une phrase, pourquoi elle n'est pas égale à $E(X)$.

Exercice 3 – Le test de déchiffrement (copie de Sacha)

5 points

Au conservatoire, l'examen de déchiffrement comporte 4 extraits courts, joués l'un après l'autre. On estime qu'un élève réussit chaque extrait avec la probabilité 0,6, indépendamment des autres extraits. On note Y le nombre d'extraits réussis; un chemin de l'arbre s'écrit avec R (réussi) et E (échoué), par exemple RERR. Le professeur a posé cinq questions sur cette situation; voici la copie de Sacha.

	Question	Réponse de Sacha
a.	Quelle est la loi de Y ?	Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.
b.	Combien de chemins de l'arbre réalisent l'événement $\{Y = 3\}$?	Il y en a 3 : RRRE, RRER et RERR.
c.	Calculer $P(Y = 3)$.	$P(Y = 3) = 0,6^3 \times 0,4 = 0,0864$.
d.	Calculer $P(Y \geq 1)$.	$P(Y \geq 1) = 1 - 0,6^4 = 0,8704$.
e.	Calculer $E(Y)$ et l'interpréter.	$E(Y) = 4 \times 0,6 = 2,4$: l'élève réussira 2,4 extraits à son examen.

Pour chacune des cinq réponses de Sacha, dire si elle est correcte. Corriger, en justifiant, celles qui ne le sont pas.

Exercice 4 – Les rappels en fin de concert (Python)

5 points

Un groupe de musique note, à chaque concert, le nombre R de rappels réclamés par le public. Il estime la loi de R :

r_i	0	1	2	3
$P(R = r_i)$	0,1	0,35	0,4	0,15

On a écrit le programme Python ci-dessous (l'instruction `round(x, 4)` arrondit x à 10^{-4}); lors de son exécution, il affiche les trois lignes reproduites à droite.

```
def esperance(valeurs, probas):
    e = 0
    for k in range(len(valeurs)):
        e = e + valeurs[k] * probas[k]
    return e

rappels = [0, 1, 2, 3]
p_rappels = [0.1, 0.35, 0.4, 0.15]
print(round(esperance(rappels, p_rappels), 4))

n = 4
p = 0.3
coeffs = [1, 4, 6, 4, 1]
valeurs = [k for k in range(n + 1)]
probas = [coeffs[k] * p**k * (1 - p)**(n - k)
           for k in range(n + 1)]
print(round(probas[0], 4))
print(round(esperance(valeurs, probas), 4))
```

Affichage obtenu

```
1.6
0.2401
1.2
```

- 1) Dans la fonction `esperance`, quel est le rôle de la variable `e` ? Expliquer le lien entre cette fonction et l'écriture $E(R) = \sum_i r_i P(R = r_i)$.
- 2) Calculer $E(R)$ à la main et comparer avec la première valeur affichée. Interpréter $E(R)$ dans le contexte.
- 3) Dans la suite du programme, la liste `probas` contient la loi d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,3)$.
 - a. Que contient la liste `valeurs` ? Justifier la deuxième valeur affichée par un calcul.
 - b. Quel résultat du cours la troisième valeur affichée illustre-t-elle ?
 - c. On veut obtenir l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(10; 0,3)$; la ligne $n = 10$ du triangle de Pascal est 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1. Réécrire les lignes du programme à modifier.