

Exercice 1 – Tirages, chemins et triangle de Pascal (vrai ou faux)

6 points

1,5 point par affirmation : 0,5 pour la réponse, 1 pour la justification.

- 1) **Fausse.** Les trois tirages ne sont pas des épreuves identiques et indépendantes. La probabilité que le premier élève tiré soit interne est $\frac{10}{25} = 0,4$. Mais si le premier élève tiré est interne, il reste 9 internes parmi 24 élèves : la probabilité que le deuxième soit interne devient $\frac{9}{24} = 0,375 \neq 0,4$. La probabilité du « succès » change d'un tirage à l'autre (tirages sans remise) : ce n'est pas un schéma de Bernoulli, et le nombre d'internes tirés ne suit pas une loi binomiale.

- 2) **Vraie.** D'après la formule de Pascal, $\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3}$: dans la ligne $n = 7$, on additionne les deux nombres situés au-dessus, $\binom{7}{2} = 21$ et $\binom{7}{3} = 35$.

$$\binom{8}{3} = 21 + 35 = \boxed{56}.$$

- 3) **Vraie.** L'événement $\{X = 2\}$ correspond aux chemins de l'arbre à 4 épreuves qui comportent exactement 2 succès : il y en a $\binom{4}{2} = 6$ (ligne $n = 4$ du triangle : 1 4 6 4 1), et chacun a pour probabilité $0,5^2 \times 0,5^2 = 0,0625$.

$$P(X = 2) = 6 \times 0,5^2 \times 0,5^2 = 6 \times 0,0625 = \boxed{0,375}.$$

- 4) **Fausse.** L'événement contraire de $\{Y \geq 1\}$ est $\{Y = 0\}$ (aucun succès) :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,8^{10} \approx 1 - 0,1074 = \boxed{0,8926}.$$

Cette probabilité est inférieure à 0,9 : l'affirmation est fausse.

Exercice 2 – Calculs avec la loi $\mathcal{B}(6; 0,3)$

4 points

- 1) Chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (formule de Pascal). (1,5 pt)

$$\begin{array}{c|cccccc} n = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n = 6 & \boxed{1} & \boxed{6} & \boxed{15} & \boxed{20} & \boxed{15} & \boxed{6} & \boxed{1} \end{array}$$

- 2) $\binom{6}{2} = 15$ (ligne $n = 6$), donc (1 pt)

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^4 = 15 \times 0,09 \times 0,2401 = 0,324135 \approx \boxed{0,3241}.$$

- 3) $\{X \leq 1\}$ est la réunion des événements $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$, incompatibles : (1,5 pt)

$$P(X = 0) = 0,7^6 = 0,117649 \quad P(X = 1) = 6 \times 0,3 \times 0,7^5 = 0,302526$$

$$P(X \leq 1) = 0,117649 + 0,302526 = 0,420175 \approx \boxed{0,4202}.$$

Exercice 3 – Une campagne de SMS promotionnels

10 points

Partie A – Ce que rapporte un SMS

- 1) Sans achat, l'enseigne perd le coût de l'envoi; avec achat, elle gagne la marge moins 0,05 € :
 $8 - 0,05 = 7,95$ et $20 - 0,05 = 19,95$. (1,5 pt)

g_i (en €)	-0,05	7,95	19,95
$P(G = g_i)$	0,85	0,12	0,03

Contrôle : $0,85 + 0,12 + 0,03 = 1$.

- 2) (1 pt)

$$E(G) = -0,05 \times 0,85 + 7,95 \times 0,12 + 19,95 \times 0,03 = -0,0425 + 0,954 + 0,5985 = \boxed{1,51}.$$

- 3) (1,5 pt)

Sur un grand nombre de SMS envoyés, chaque SMS rapporte en moyenne 1,51 € à l'enseigne, coût de l'envoi déduit.

Pour 2 000 SMS : $2\,000 \times 1,51 = \boxed{3\,020 \text{ €}}$. L'enseigne peut espérer un gain d'environ 3 020 €; c'est une moyenne, le gain réel de la campagne peut s'en écarter.

Partie B – Dix clients sous la loupe

- 4) (1 pt)

Pour chaque client choisi, il y a deux issues : « il a utilisé le code » (succès), de probabilité $0,12 + 0,03 = 0,15$, ou non. On répète 10 fois cette épreuve de Bernoulli, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise). X compte le nombre de succès :

X suit la loi binomiale $\boxed{B(10; 0,15)}$.

- 5) $P(X = 0) = 0,85^{10} \approx \boxed{0,1969}$. (1 pt)

Il y a environ 19,7 % de chances qu'aucun des dix clients interrogés n'ait utilisé le code de réduction.

- 6) $\binom{10}{2} = 45$, donc (1 pt)

$$P(X = 2) = 45 \times 0,15^2 \times 0,85^8 \approx 45 \times 0,0225 \times 0,272491 \approx \boxed{0,2759}.$$

- 7) (2 pts)

$P(X = 1) = 10 \times 0,15 \times 0,85^9 \approx 0,347425$, et $\{X \geq 2\}$ est l'événement contraire de $\{X \leq 1\}$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,196874 - 0,347425 \approx \boxed{0,4557}.$$

La directrice a tort : la probabilité de trouver au moins deux clients qui ont utilisé le code, environ 0,46, est inférieure à 0,5; il est donc un peu plus probable d'en trouver au plus un.

8) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,15 = \boxed{1,5}$. (1 pt)

Si l'on répétait un grand nombre de fois cette enquête auprès de dix clients, on trouverait en moyenne 1,5 client ayant utilisé le code par groupe de dix.