

Exercice 1 – Automatismes et changements de variable

5 points

Chaque bonne réponse vaut 1 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Éléments de méthode
1	$x = 2,5$	$3x = 0,5 + 7 = 7,5$, donc $x = \frac{7,5}{3} = 2,5$.
2	$y = 2x - 1$	Ordonnée à l'origine -1 (point $(0; -1)$); la droite passe aussi par $(2; 3)$: coefficient directeur $\frac{3 - (-1)}{2 - 0} = 2$.
3	20 %	$\frac{72}{360} = \frac{1}{5} = 0,2$: les angles sont proportionnels aux effectifs.
4	$y = 1\,000$	Pour $x = 1$: $\log y = 2 \times 1 + 1 = 3$, donc $y = 10^3 = 1\,000$.
5	$y = 3x^2 - 2$	On remplace u par x^2 dans $y = 3u - 2$.

Exercice 2 – Changements de variable en questions (vrai ou faux)

7 points

1) Vrai.

(1,75 pt)

$\log y = 0,301x + 2$ donne $y = 10^{0,301x+2} = 10^2 \times (10^{0,301})^x$. Quand x augmente de 1, y est multiplié par $10^{0,301}$. Comme $\log 2$ vaut environ 0,301, le nombre $10^{0,301}$ est très voisin de $10^{\log 2} = 2$: y est à peu près multiplié par 2.

2) Faux. On compare les sommes des carrés des écarts verticaux $S = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$. (1,75 pt)

x_i	y_i	$D_1 : 1,5x_i + 0,8$	écart pour D_1	écart pour $D_2 : y_i - (x_i + 1)$
0	1	0,8	0,2	0
1	2	2,3	-0,3	0
2	4	3,8	0,2	1

$$S_1 = 0,2^2 + (-0,3)^2 + 0,2^2 = 0,04 + 0,09 + 0,04 = 0,17 \quad \text{et} \quad S_2 = 0 + 0 + 1^2 = 1.$$

$S_1 < S_2$: c'est D_1 qui ajuste le mieux au sens des moindres carrés. Passer exactement par deux points ne suffit pas : D_2 laisse le troisième point très loin.

3) Faux. Les valeurs sont $y = 7$, $y = 4,5$ et $y = 3$ pour $x = 1, 2, 5$; avec $u = x^2$, les points sont $(1; 7)$, $(4; 4,5)$, $(25; 3)$. (1,75 pt)

Coefficients directeurs : $\frac{4,5 - 7}{4 - 1} = -\frac{5}{6}$ et $\frac{3 - 4,5}{25 - 4} = -\frac{1,5}{21} = -\frac{1}{14}$: ils sont différents, les points ne sont pas alignés.

(C'est le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ qui convient : $y = 5u + 2$.)

4) Faux. Avec $u = \frac{1}{x}$, le modèle s'écrit $y = \frac{300}{x} + 1$. Contre-exemple : (1,75 pt)

pour $x = 100$, $y = 3 + 1 = 4$; pour $x = 200$, $y = 1,5 + 1 = 2,5$, et $2,5 \neq \frac{4}{2} = 2$.

Seule la partie $\frac{300}{x}$ est divisée par deux; la constante 1, elle, ne change pas.

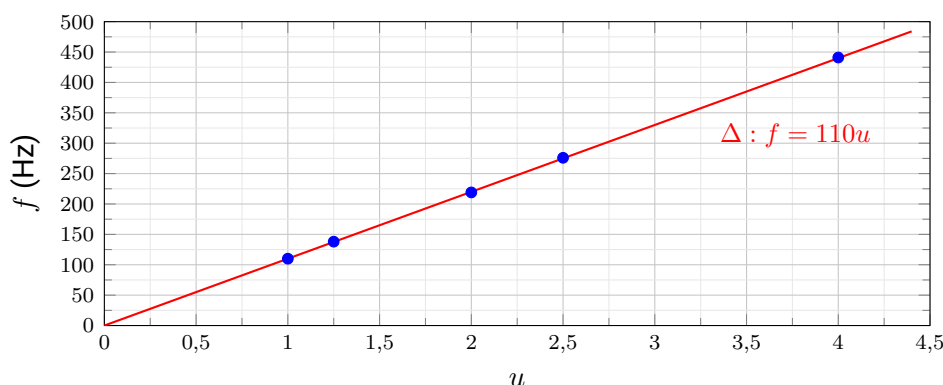
Exercice 3 — La corde d'un monocorde

8 points

- 1) $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = 1,25$; $\frac{1}{0,5} = 2$; $\frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = 2,5$; $\frac{1}{0,25} = 4$. (1 pt)

L (m)	1	0,8	0,5	0,4	0,25
f (Hz)	110	138	219	276	441
$u = \frac{1}{L}$	1	1,25	2	2,5	4

- 2) Nuage (u ; f) en bleu; la droite Δ de la question 3 est tracée en rouge. (1,5 pt)



Les points sont presque alignés avec l'origine : l'ajustement par Δ est pertinent.

- 3) Δ passe par l'origine et par le point (4; 440) : on la trace en joignant ces deux points (voir ci-dessus). (1 pt)

Pour $L = 0,5$ m, $u = 2$ et Δ donne $f = 110 \times 2 = 220$ Hz; on a mesuré 219 Hz : l'écart est de (en valeur absolue).

- 4) En remplaçant u par $\frac{1}{L}$: $f = \frac{110}{L}$. (1 pt)

- 5) On résout $\frac{110}{L} = 330$, soit $330L = 110$, donc $L = \frac{110}{330} = \frac{1}{3}$ m. (1,5 pt)

Comme $0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$ (car $3 \times 0,33 = 0,99 < 1 < 1,02 = 3 \times 0,34$) : .

Pour jouer ce mi, il faut placer le chevalet de façon que la longueur vibrante mesure un tiers de mètre, entre 33 et 34 cm.

- 6) Si la longueur passe de L à $\frac{L}{2}$, la fréquence devient $\frac{110}{L/2} = \frac{2 \times 110}{L} = 2 \times \frac{110}{L}$: elle est multipliée par 2. (1 pt)

Le modèle est bien en accord avec la phrase des musiciens : diviser la longueur vibrante par deux double la fréquence, donc fait monter le son d'une octave (par exemple $L = 0,5$ m donne 220 Hz et $L = 0,25$ m donne 440 Hz).

- 7) Le calcul $\frac{110}{2} = 55$ est juste, mais l'affirmation n'a pas de sens pour ce monocorde : comme l'indique l'énoncé, sa longueur vibrante vaut au plus 1 m (la caisse mesure un mètre). (1 pt)
De plus, les mesures ont été faites pour L entre 0,25 m et 1 m : utiliser le modèle pour $L = 2$ m serait une extrapolation hors des données, sur un instrument qui ne le permet pas.