

Exercice 1 – Quel changement de variable aligne les points ?

4 points

1)

(1 pt)

x_i	1	2	4	6
y_i	3,5	5	11	21
$u_i = x_i^2$	1	4	16	36
$v_i = \frac{1}{x_i}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

2) Coefficients directeurs entre points consécutifs du nuage $(u_i ; y_i)$:

(1,5 pt)

$$\frac{5 - 3,5}{4 - 1} = \frac{1,5}{3} = 0,5 \quad \frac{11 - 5}{16 - 4} = \frac{6}{12} = 0,5 \quad \frac{21 - 11}{36 - 16} = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Les trois coefficients sont égaux : les quatre points $(u_i ; y_i)$ sont **alignés**, sur une droite de coefficient directeur 0,5.

3) Nuage $(v_i ; y_i)$: $\frac{5 - 3,5}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1,5}{-0,5} = -3$ et $\frac{11 - 5}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{6}{-0,25} = -24$.

(0,75 pt)

Les coefficients diffèrent : les points $(v_i ; y_i)$ **ne sont pas alignés**.

4) La droite passe par $(1 ; 3,5)$ et a pour coefficient directeur 0,5 : $y = 0,5u + p$ avec $3,5 = 0,5 \times 1 + p$, donc $p = 3$ et $y = 0,5u + 3$. En remplaçant u par x^2 :

(0,75 pt)

$$y = 0,5x^2 + 3$$

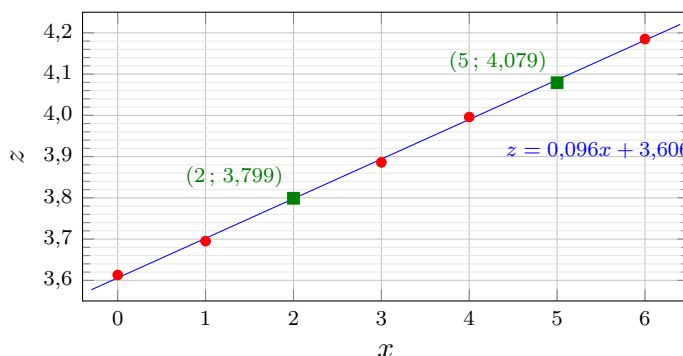
Contrôle : $0,5 \times 2^2 + 3 = 5$, $0,5 \times 4^2 + 3 = 11$, $0,5 \times 6^2 + 3 = 21$.

Exercice 2 – Les abonnés d'une plateforme de cours de langues

9 points

1) $z_2 = \log 6\,300 \approx \boxed{3,799}$ et $z_5 = \log 12\,000 \approx \boxed{4,079}$.

(1,5 pt)



Les deux points placés sont les carrés verts ; la droite bleue est celle de la question 4.

2) Dans le nuage $(x_i ; y_i)$, les écarts d'une année à la suivante augmentent (850, 1 350, 1 400, 2 200, 2 100, 3 300) : les points forment une courbe tournée vers le haut, une droite passerait au-dessus

des points du milieu et sous ceux des extrémités. Dans le nuage $(x_i; z_i)$, les points sont presque alignés : **un ajustement affine de z en x est donc plus adapté.** (1 pt)

- 3) a. La liste Z contient les sept valeurs $z_i = \log y_i$ (non arrondies), calculées à partir de la liste Y. La variable `total` est un **accumulateur** : elle part de 0 et on lui ajoute, pour chaque i de 0 à 6, le carré de l'écart $z_i - (ax_i + b)$; à la fin de la boucle elle vaut $S(a; b)$. (1 pt)

- b. Les deux boucles imbriquées testent $3 \times 2 = \boxed{6}$ couples. On retient celui pour lequel S est la plus petite : (1 pt)
0,00073 est la plus petite des six valeurs affichées, donc on retient $\boxed{(a; b) = (0,095; 3,6)}$: parmi les six droites testées, c'est celle dont les points du nuage sont globalement les plus proches.

- 4) À la calculatrice (régression linéaire sur les listes x_i et z_i) : (0,5 pt)

$$\boxed{z = 0,096x + 3,606}$$

(Elle est d'ailleurs très proche de la droite retenue à la question 3, $z = 0,095x + 3,6$: aucune comparaison n'est demandée.)

- 5) Comme $z = \log y$, on a $y = 10^z$, donc (2 pt)

$$y \approx 10^{0,096x+3,606} = 10^{3,606} \times 10^{0,096x} = 10^{3,606} \times (10^{0,096})^x.$$

Avec $10^{3,606} \approx 4036$ et $10^{0,096} \approx 1,247$: $\boxed{y \approx 4036 \times 1,247^x}$.

Chaque année, le nombre d'abonnés est multiplié par environ 1,247 : selon ce modèle, il augmente d'environ 24,7 % par an.

- 6) Le 1^{er} janvier 2027 correspond à $x = 8$: $y \approx 10^{0,096 \times 8 + 3,606} = 10^{4,374} \approx 23\,659$ (ou $4036 \times 1,247^8 \approx 23\,598$ avec les coefficients arrondis). (2 pt)

Les deux valeurs, 23 659 et 23 598, sont acceptées : l'écart vient seulement de la façon d'arrondir ; arrondies au millier, elles donnent toutes deux 24 000.

Selon ce modèle, la plateforme peut espérer environ $\boxed{24\,000}$ abonnés au 1^{er} janvier 2027.

Pour 2040 ($x = 21$), le modèle donnerait $10^{0,096 \times 21 + 3,606} \approx 419\,000$ abonnés. Ce n'est pas raisonnable : on extrapole quinze ans au-delà des sept années observées, et une hausse de près de 25 % par an ne peut pas durer indéfiniment (concurrence, nombre limité de clients potentiels, saturation du marché). Le modèle n'est utilisable qu'à court terme.

Exercice 3 – L'horloge à l'iode (copie d'élève)

7 points

- 1) **Extrait 1 : correct.** $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{5} = 0,2$, $\frac{1}{8} = 0,125$, $\frac{1}{10} = 0,1$, $\frac{1}{16} = 0,0625$, $\frac{1}{20} = 0,05$; les points $(u; t)$ sont presque alignés, un ajustement affine de t en u est pertinent. (1 pt)
(L'extrait 2 est admis; pour information, la calculatrice donne $t \approx 300,95u + 1,00$, soit bien $t = 301u + 1$ en arrondissant à l'unité.)

- 2) **Extrait 3 : faux.** La variable u n'est pas c mais $\frac{1}{c}$: il faut remplacer u par $\frac{1}{c}$, et non par c . (3,5 pt)
Noé aurait dû repérer l'erreur : d'après le tableau, la durée *diminue* quand la concentration aug-

mente, alors que $301c + 1$ augmente avec c ; et 3 613 s (environ une heure) est absurde pour $c = 12$, entre les mesures $c = 10$ (31 s) et $c = 16$ (20 s).

Expression correcte : $t = \frac{301}{c} + 1$.

Pour $c = 12$: $t = \frac{301}{12} + 1 \approx 26,08$, soit $t \approx 26,1$ s.

Avec une concentration de 12 mmol/L, la couleur devrait apparaître au bout d'environ 26 secondes, ce qui est cohérent avec les mesures voisines (31 s et 20 s).

3) Extrait 4 : faux.

(2,5 pt)

- *Par l'équation de la droite* : $t = 301u + 1$ avec $u > 0$, donc $t > 1$. Quand u devient très proche de 0, t devient très proche de 1, et non de 0 : pour $c = 1\,000$, $u = 0,001$ et $t = 1,301$ s. Le modèle ne prévoit jamais une durée inférieure à 1 seconde.
- *Par les mesures* : les concentrations mesurées vont de 4 à 20 mmol/L, soit u entre 0,05 et 0,25. Une concentration de 1 000 mmol/L est cinquante fois plus grande que la plus grande mesure : c'est une extrapolation très lointaine, que rien ne garantit (la réaction pourrait se comporter autrement à de telles concentrations).