

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Quel changement de variable aligne les points ?

4 points

On considère la série statistique à deux variables ci-contre. On envisage deux changements de variable :

$$u = x^2 \text{ ou } v = \frac{1}{x}.$$

x_i	1	2	4	6
y_i	3,5	5	11	21

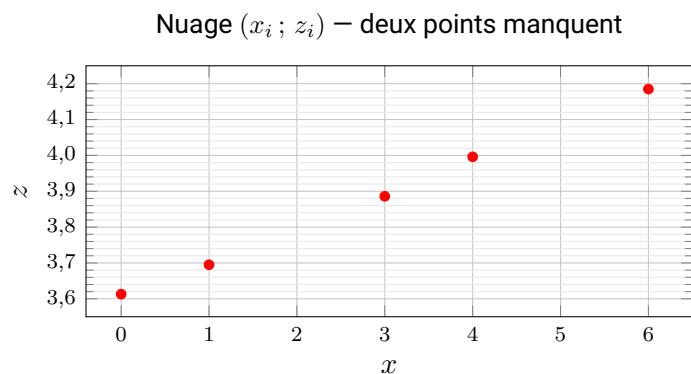
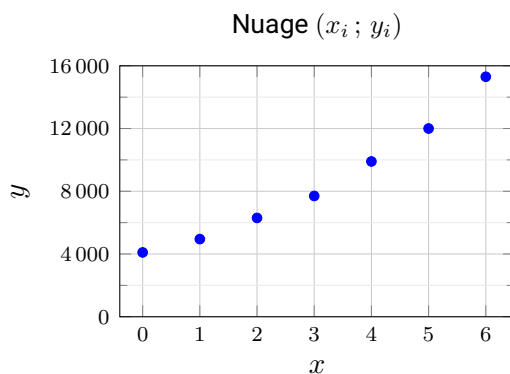
- 1) Recopier le tableau en ajoutant une ligne pour $u_i = x_i^2$ et une ligne pour $v_i = \frac{1}{x_i}$ (valeurs exactes, en fractions si nécessaire).
- 2) Calculer le coefficient directeur de la droite passant par deux points consécutifs du nuage $(u_i ; y_i)$, pour les trois couples de points consécutifs. Que peut-on en conclure ?
- 3) Le nuage $(v_i ; y_i)$ est-il formé de points alignés ? Justifier.
- 4) En déduire une expression de y en fonction de x qui convient pour les quatre points du tableau.

Exercice 2 – Les abonnés d'une plateforme de cours de langues

9 points

Une jeune entreprise propose des cours de langues en ligne par abonnement. Le tableau donne le nombre y_i d'abonnés payants au 1^{er} janvier de l'année 2019 + x_i . On pose $z = \log y$.

Année	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Abonnés y_i	4 100	4 950	6 300	7 700	9 900	12 000	15 300
$z_i = \log y_i$	3,613	3,695		3,886	3,996		4,185



- 1) Calculer les deux valeurs manquantes de z_i , arrondies à 10^{-3} , puis placer les deux points correspondants sur le nuage $(x_i ; z_i)$ de l'énoncé, à rendre avec la copie.
- 2) Au vu des deux nuages, expliquer pourquoi un ajustement affine de z en x est plus adapté qu'un ajustement affine de y en x .
- 3) Pour comparer des droites d'équation $z = ax + b$, on utilise $S(a ; b) = \sum_{i=0}^6 (z_i - (ax_i + b))^2$. Un élève écrit le programme ci-dessous ; son exécution affiche les six lignes reproduites à droite.

```
from math import log10
X = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
Y = [4100, 4950, 6300, 7700, 9900, 12000, 15300]
Z = [log10(y) for y in Y]

def S(a, b):
    total = 0
    for i in range(7):
        total = total + (Z[i] - (a*X[i] + b))**2
    return total

for a in [0.09, 0.095, 0.1]:
    for b in [3.60, 3.62]:
        print(a, b, round(S(a, b), 5))
```

```
0.09 3.6 0.00495
0.09 3.62 0.00124
0.095 3.6 0.00073
0.095 3.62 0.00122
0.1 3.6 0.00106
0.1 3.62 0.00575
```

- a. Que contient la liste `Z`? Quel est le rôle de la variable `total` dans la fonction `S`?
- b. Combien de couples $(a; b)$ le programme teste-t-il? Lequel retenir parmi eux? Justifier.
- 4) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés, *coefficients arrondis à 10^{-3}* .
- 5) En utilisant cette équation, montrer que $y \approx 10^b \times (10^a)^x$, puis donner une expression de la forme $y \approx k \times q^x$, k *arrondi à l'unité* et q à 10^{-3} . Interpréter q en termes de taux d'évolution annuel du nombre d'abonnés.
- 6) Selon ce modèle, combien d'abonnés la plateforme peut-elle espérer au 1^{er} janvier 2027? *Arrondir au millier*. Le directeur voudrait utiliser le même modèle pour prévoir le nombre d'abonnés en 2040 : qu'en penser?

Exercice 3 – L'horloge à l'iode (copie d'élève)

7 points

Au laboratoire, une réaction « horloge » fait brusquement apparaître une couleur bleu nuit au bout d'une durée t , en secondes, qui dépend de la concentration c d'un réactif, en mmol/L. On a mesuré :

Concentration c (mmol/L)	4	5	8	10	16	20
Durée t (s)	77	60	39	31	20	16

L'énoncé proposait le changement de variable $u = \frac{1}{c}$. Voici quatre extraits de la copie de Noé.

Extrait 1. « J'ai calculé u : 0,25; 0,2; 0,125; 0,1; 0,0625; 0,05. Les points $(u; t)$ sont presque alignés, donc un ajustement affine de t en u est justifié. »

Extrait 2. « À la calculatrice, la droite des moindres carrés de t en u est $t = 301u + 1$ (coefficients arrondis à l'unité). »

Extrait 3. « Comme u remplace c , on obtient $t = 301c + 1$. Pour $c = 12$ mmol/L, la couleur apparaît au bout de $t = 301 \times 12 + 1 = 3\,613$ s. »

Extrait 4. « Quand c devient très grand, u devient très proche de 0, donc t aussi : avec une concentration de 1 000 mmol/L, la couleur apparaîtrait presque instantanément. »

- 1) L'extrait 1 est-il correct? Vérifier les calculs. *On admet que l'équation de l'extrait 2 est correcte.*
- 2) Expliquer l'erreur de l'extrait 3, et pourquoi Noé aurait dû la repérer. Donner l'expression correcte de t en fonction de c , puis la durée prévue pour $c = 12$ mmol/L, *arrondie au dixième de seconde*.
- 3) Critiquer l'extrait 4 de deux façons : à l'aide de l'équation de la droite de l'extrait 2, puis au regard des concentrations mesurées.